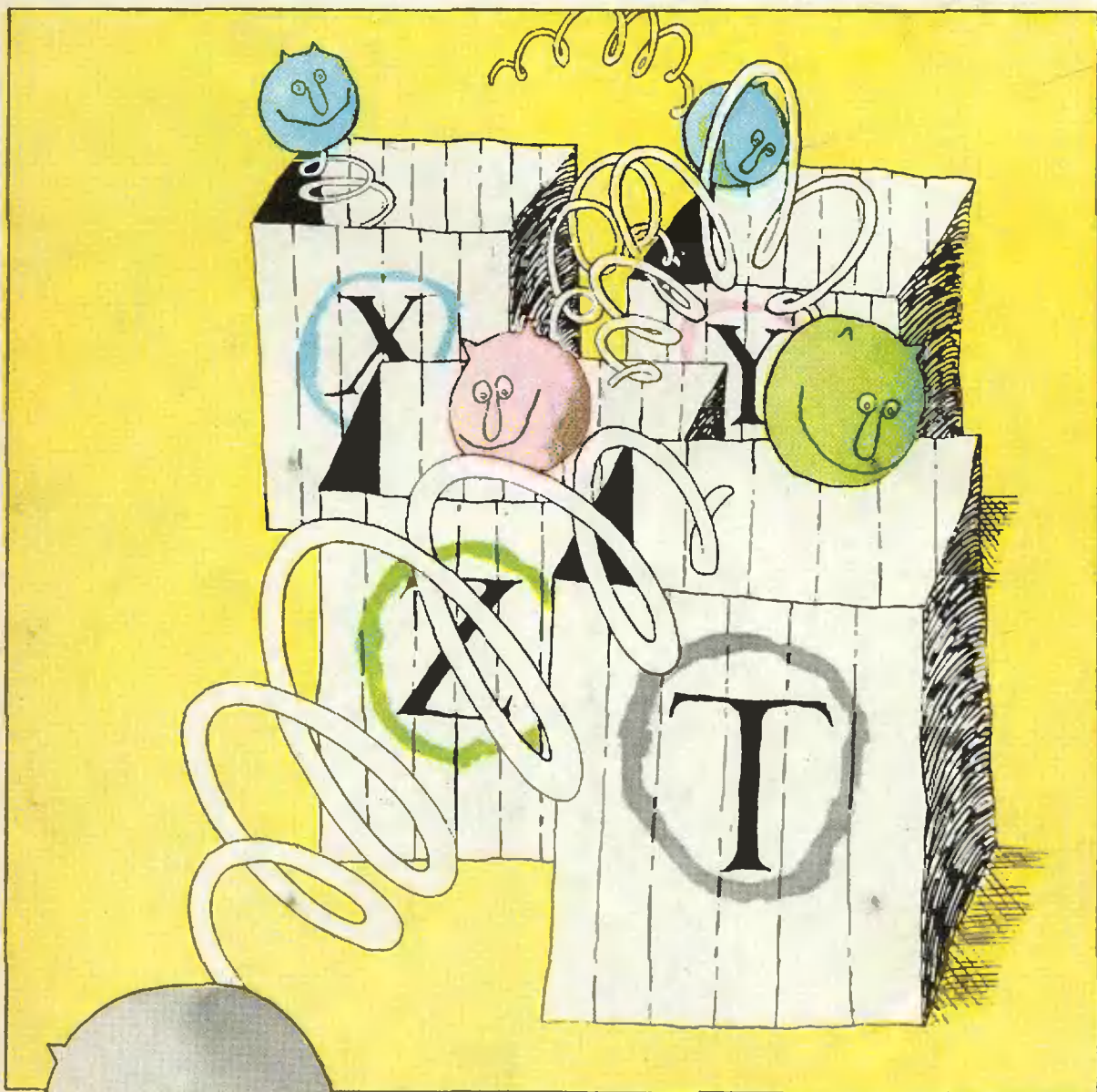


Квант

5
1986

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



Зачем
микрокалькулятору стек?



В этом году исполнилось 30 лет Объединенному институту ядерных исследований — международному научному центру, расположенному в подмосковном городе Дубне.

В ОИЯИ проводят исследования ученые Болгарии, Венгрии, Вьетнама, ГДР, КНДР, Кубы, Монголии, Польши, Румынии, Советского Союза и Чехословакии.

На снимке — одна из базовых экспериментальных установок института циклотрона У-400, обладающий параметрами лучших в мире ускорителей тяжелых ионов.



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



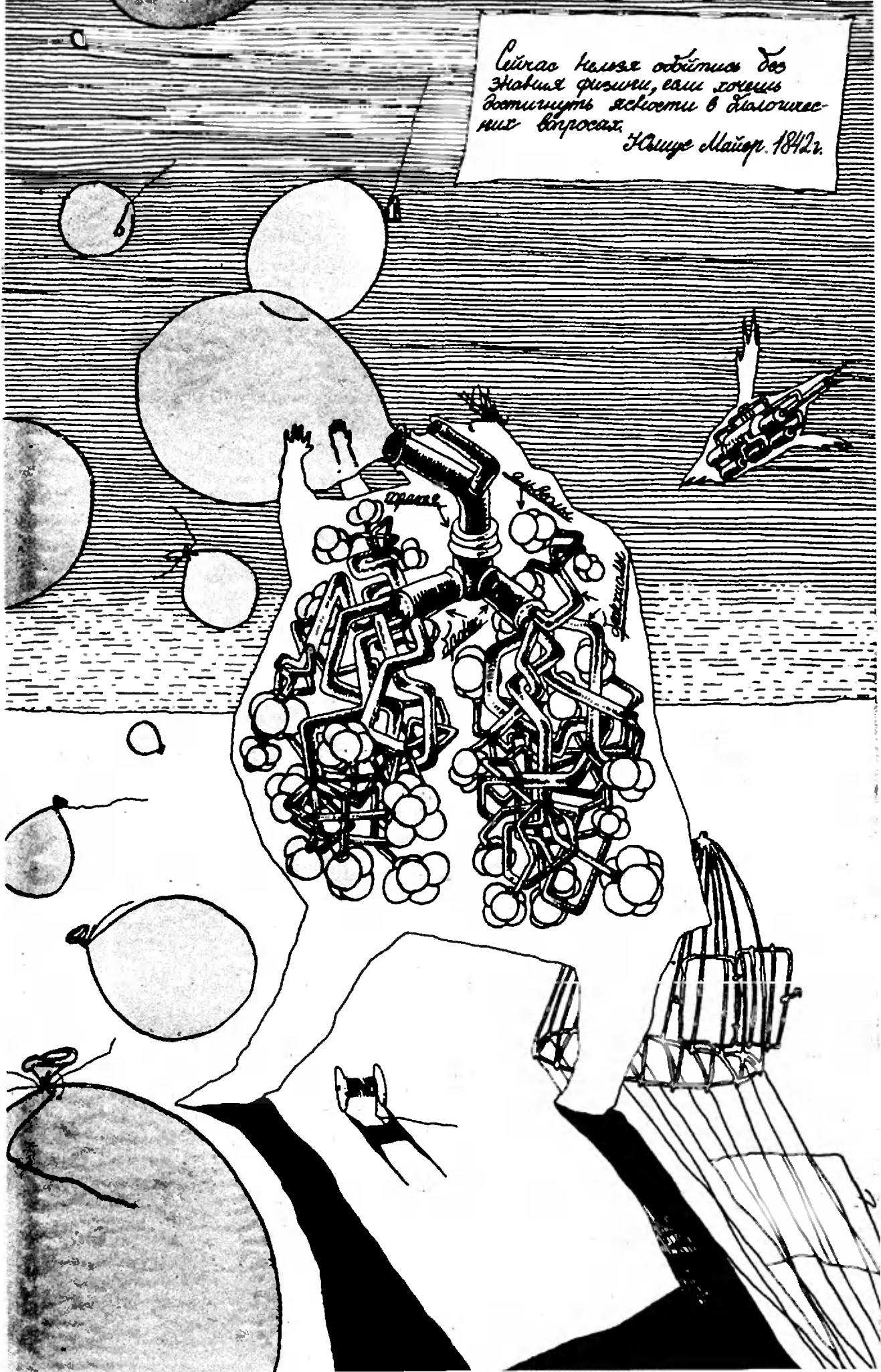
В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	<i>К. Ю. Богданов.</i> Как мы дышим?	<i>K. Yu. Bogdanov.</i> How do we breathe?
9	<i>А. П. Веселов.</i> О математике гармонических колебаний	<i>A. P. Veselov.</i> On the mathematics of harmonic oscillations
14	<i>Ю. Г. Павленко.</i> Парадокс спутника	<i>Yu. G. Pavlenko.</i> The sputnik paradox
16	Математический кружок <i>В. В. Прасолов.</i> Используя площадь...	Mathematics circle <i>V. V. Prasolov.</i> Using area...
20	Школа в «Кванте» Физика 8, 9, 10	Kvant's school Physics 8, 9, 10
25	«Квант» для младших школьников Задачи	Kvant for younger school children Problems
26	<i>А. И. Буздин.</i> Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда	<i>A. I. Buzdin.</i> A little about thermometers and Ferdinand's thermoscope
28	Задачник «Кванта» Задач М981—М985; Ф993—Ф997	Kvant's problems Problems M981—M985; P993—P997
30	Решения задач М961—М965; Ф973—Ф977	Solutions M961—M965; P973—P977
32	Калейдоскоп «Кванта»	Kvant's kaleidoscope
39	Искусство программирования <i>Л. Ф. Штернберг.</i> Зачем микрокалькулятору стек	The art of programming <i>L. F. Shternberg.</i> Why the pocket calculator has a stack
44	Полупроводниковые элементы вычислительной техники IX. Сумматор	Semiconducting elements in computers IX. Summators
46	Практикум абитуриента <i>М. Р. Либерзон.</i> Вспомогательный куб	College applicant's section <i>M. R. Liberson.</i> Auxilliary cubes
51	Варианты вступительных экзаменов	College entrance examination problems
57	Олимпиады Первая Всесоюзная олимпиада по математике учащихся средних профессионально-технических училищ	Olympiads First All-Union mathematics olympiad for secondary professional-technical institutions
58	Ответы, указания, решения «Квант» улыбается (8) Смесь (58) Шахматная страничка Бесконечная доска (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Kvant smiles (8) Miscellaneous (58) The chess page Infinite chessboard (3rd cover page)

Ответ на вопрос, заданный на первой странице обложки, см. найдете в статье Л. Ф. Штернберга (см. с. 39).

Съясно кассе отъимая до
Жабуя пресури, еамъ зорелу
Вотуримыя зелоому в Жабуяе-
нуе впроеах.
Жууе Маюа. 1842г.



Как мы дышим?

Кандидат физико-математических наук
К. Ю. БОГДАНОВ

О чем рассказывает электрокардиограмма? Как летучие мыши в полной темноте ловят мошкору? Как почтовые голуби находят дорогу домой? Ответы на эти и многие другие вопросы дает биофизика — наука, изучающая физические явления в живых организмах, лежащая на стыке физики и биологии, использующая новейшие достижения физики в биологических исследованиях. Попробуем и мы, вооружившись школьными знаниями физики, ответить на, казалось бы, простой вопрос: как мы дышим?*)

Наша дыхательная система

При нормальном дыхании наш организм потребляет в день около 0,5 кг кислорода и выделяет почти такое же количество углекислого газа. И поступление кислорода, и выход углекислого газа осуществляются через легкие.

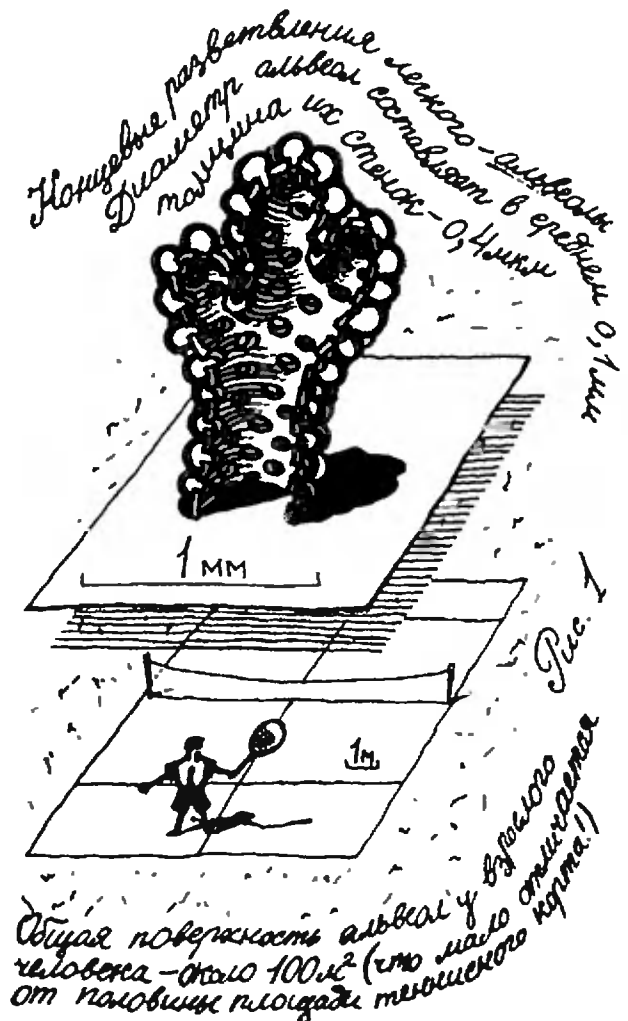
Внутреннее пространство легких сообщается с атмосферой посредством воздухоносных путей. Воздухоносные пути состоят из носовой полости, где вдыхаемый воздух подогревается и увлажняется, глотки, гортани, трахеи и двух главных бронхов, подводящих воздух к правому и левому легкому. Каждый бронх делится на более мелкие бронхи (бронхиолы) и заканчивается микроскопическими легочными пузырьками — альвеолами, окруженными со всех сторон густой сетью кровеносных сосудов. Альвеолы, которых у взрослого человека насчитывается около 700 миллионов, представляют собой соединенные друг с другом пузырьки, наполненные воздухом (рис. 1). В каждый момент времени в кровеносных сосудах, оплетающих альвеолы, находится примерно 70 мл крови, из кото-

рой в альвеолы диффундирует углекислый газ, а в обратном направлении — кислород. Огромная поверхность альвеол позволяет менее чем за одну секунду насытить эту кровь кислородом и освободить ее от избытка углекислого газа.

Дыхание и мыльные пузыри

Легко ли нам сделать вдох? На сколько давление воздуха внутри легких (внутри альвеол) при вдохе превышает давление снаружи (в плевральной полости)?

Если считать, что каждая альвеола — это полый шарик из эластичной мембраны, то давление, необходимое для поддержания такого шарика в раздутом состоянии, при заданном внешнем давлении должно полностью определяться диаметром шарика и упругими свойствами мембраны. Так ли это?



*) От редакции. Скоро выйдет в свет 49 выпуск «Библиотечки «Квант» — книга К. Ю. Богданова «Физик в гостях у биолога». Прочитать эту книгу мы советуем всем, кто любит физику, биологию; всем, кто любит задавать вопросы, глядя на окружающий нас мир.

В 1929 году швейцарский ученый Карл фон Нииргард обнаружил, что давление, необходимое для раздувания легких, можно значительно уменьшить, если заполнить легкие физиологическим раствором. Это никак не вязалось с представлением об альвеолах как о полых эластичных шариках: если бы при вдохе нам надо было преодолевать только силы упругости, то наши усилия не зависели бы от того, заполнено легкое раствором или нет — ведь силы упругости от этого не зависят. Данные, полученные Нииргардом, стали объяснимы, когда выяснилось, что каждая альвеола изнутри покрыта тонким слоем жидкости. Это обстоятельство существенно влияет на механические свойства альвеолы. В частности, давление, необходимое для раздувания альвеолы, оказывается больше, чем в случае полого шарика из легочной ткани. И вот почему.

Известно, что поверхность жидкости ведет себя подобно растянутой пленке — обладает поверхностным натяжением. Чтобы оценить роль сил поверхностного натяжения в механике альвеолы, рассмотрим пленку жидкости, имеющую форму сферы (простейший пример такой пленки — мыльный пузырь).*) Давление воздуха внутри пузыря из-за поверхностного натяжения жидкости всегда оказывается больше внешнего давления. Величина избыточного давления внутри сферы радиуса R определяется соотношением Лапласа $\Delta p = 2\sigma/R$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения пленки. Это избыточное давление тем больше, чем меньше радиус сферы. В пленке мыльного пузыря и внутренняя, и внешняя поверхности соприкасаются с воздухом, и σ пленки равно удвоенному значению коэффициента поверхностного натяжения жидкости. В альвеолах контакт воздух — жидкость осуществляется лишь с одной стороны, изнутри.

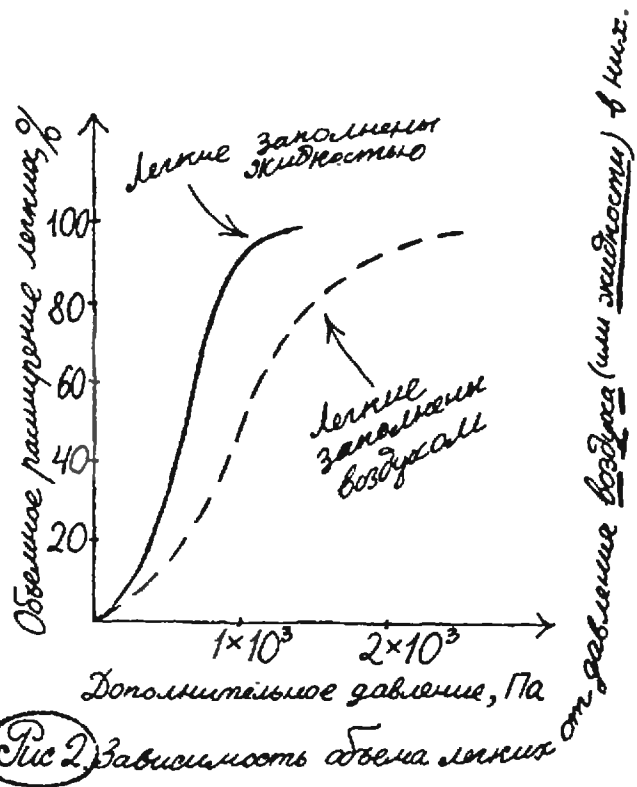
Давайте оценим величину Δp . Для межклеточной жидкости $\sigma = 5 \cdot 10^{-2}$ Н/м; примем это значение и для жидкости, выстилающей внутреннюю поверхность альвеолы. По-

лагая $R = 50 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, получаем: $\Delta p = 2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$.

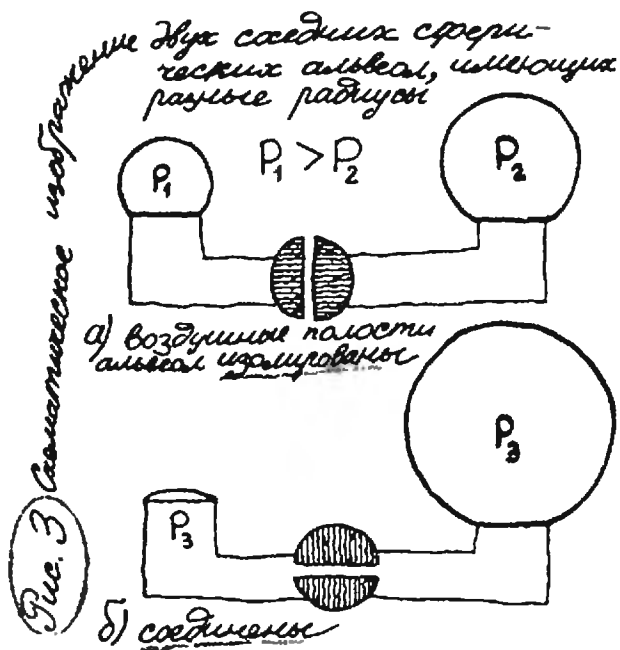
На рисунке 2 приведена зависимость объема легких от давления внутри них (точнее, от того, на сколько это давление превышает внешнее). Из графиков видно, что если не всё, то по крайней мере значительная часть давления, растягивающего легкие при вдохе, идет на преодоление сил поверхностного натяжения. Когда же легкие заполнены физиологическим раствором, дополнительное давление необходимо лишь для преодоления упругих свойств легочных тканей. Очевидно, что разница между двумя кривыми на рисунке 2 и представляет вклад сил поверхностного натяжения в эластичность легкого. При обычном вдохе объем легких человека составляет около 50% их максимального объема. Как следует из рисунка 2, в этом диапазоне вклад сил поверхностного натяжения составляет более 30%.

Не всё так просто

Привлечение сил поверхностного натяжения для объяснения механических свойств легкого приводит к следующему «парадоксу» при объяснении взаимодействия между соседними альвеолами. На рисунке 3 схематически показаны две соседние альвео-



*) В серии «Библиотечка «Квант» в 1985 году (46 выпуск) вышла книга Я. Е. Гегузина «Пузыри». В ней читатель найдет подробное объяснение поведения мыльных пузырей в разных условиях и вообще много интересного из жизни пузырей (Примеч ред)



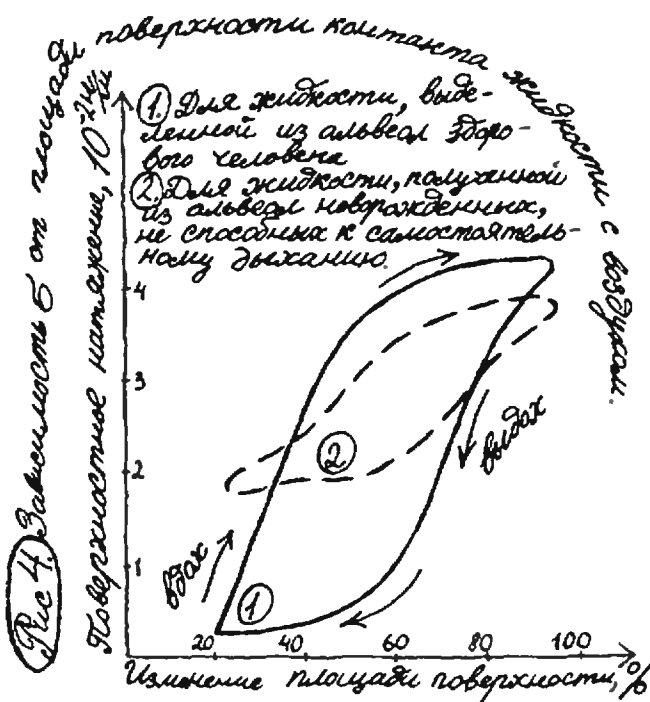
лы, имеющие разные размеры. Предположим сначала, что воздушные полости альвеол не сообщаются друг с другом (рис. 3, а). Давление воздуха p_1 в левой альвеоле больше, чем давление p_2 в правой (поскольку $R_1 < R_2$). Поэтому, как только мы откроем «кран», соединяющий воздушные полости альвеол, воздух из левой альвеолы начнет перетекать в правую, пока давление в обеих альвеолах не станет одинаковым (рис. 3, б). Таким образом, при соединении воздушных полостей двух неодинаковых альвеол большая всегда будет раздуваться, а меньшая — спадать. Очевидно, что такое взаимодействие между соседними альвеолами привело бы к спадению всех мелких альвеол легкого и к разрыву крупных; в результате легкое уже не могло бы выполнять своей функции. Как же мы все-таки дышим?

Рассматривая взаимодействие между соседними альвеолами, мы заранее считали, что поверхностное натяжение одинаково у различных альвеол и не зависит от того, в каком состоянии — раздутом или спавшемся — они находятся. У чистых жидкостей поверхностное натяжение действительно не зависит от размеров поверхности. Но у жидкостей, содержащих различные примеси, σ зависит от величины поверхности, по которой они граничат с газом.

Опять Природа все предусмотрела. Вещество, содержащееся в виде примеси в жидкости, смачивающей изнутри поверхность альвеол, так регулирует величину поверхностного натяжения, что σ минимально в начале вдоха (минимальная поверхность) и максимально в его конце (максимальная поверхность). Поэтому, несмотря на то, что радиус альвеол в начале вдоха очень мал, вклад сил поверхностного натяжения невелик. Это позволяет раздуть спавшиеся альвеолы относительно малым давлением. В то же время, увеличение σ с увеличением радиуса альвеолы препятствует ее чрезмерному раздуванию в конце вдоха. Кроме того, такая зависимость σ от размера альвеолы регулирует взаимоотношения между соседними альвеолами, не давая проявляться механизму, проиллюстрированному рисунком 3.

Почему примеси делают поверхностное натяжение зависимым от площади поверхности? Как правило, примеси, понижающие σ , по своей химической структуре очень близки к обычному мылу и при растворении образуют тонкую пленку на поверхности воды. Если концентрация примеси высока, так что пленка может покрыть непрерывным слоем всю поверхность воды, то σ такой жидкости равняется определенному для данной примеси значению. Когда же концентрация примеси недостаточна, чтобы покрыть пленкой всю поверхность, поверхностное натяжение жидкости будет находиться между соответствующими значениями σ для воды и примеси. В этих случаях увеличение поверхности жидкости ведет к уменьшению поверхностной концентрации примеси и вызывает увеличение σ , приближая его значение к σ для воды. При уменьшении поверхности жидкости σ будет уменьшаться.

Теперь посмотрите на рисунок 4. На нем приведены зависимости поверхностного натяжения от площади поверхности контакта жидкости с воздухом. Обратите внимание: при одной и той же площади поверхности контакта величина σ на «вдохе» всегда больше, чем на «выдохе». Связано это вот с чем. Примесь, понижающая поверхностное натяжение, находится не только на поверхности жидкости, но и в ее объе-



ме. При увеличении площади поверхности, то есть при уменьшении концентрации примеси на поверхности, часть молекул примеси из глубины жидкости устремляется к поверхности. Однако равновесие устанавливается не мгновенно. Поэтому, например, в начале «вдоха» быстрое увеличение поверхности жидкости сопровождается резким ростом σ , так как растворенные в объеме примеси не успевают выйти на поверхность; равновесие между примесными молекулами наступает лишь в конце «вдоха». Точно также, только в конце «выдоха» σ соответствует равновесному состоянию. Этим и объясняется зависимость σ от площади поверхности, показанная на рисунке 4.

Откуда берутся в легких вещества, понижающие поверхностное натяжение и этим облегчающие наше дыхание? Оказалось, что их синтезируют специальные клетки, находящиеся в стенках альвеол. Синтез этих веществ, называемых поверхностно-активными веществами (ПАВ), идет в течение всей жизни человека — от его рождения до смерти. Кривая 2 на рисунке 4 соответствует легочной жидкости с пониженным содержанием ПАВ. Видно, что минимальное значение σ почти в восемь раз увеличено по сравнению с нормой. В тех редких случаях, когда у новорожденного отсутствуют в легких клетки,

производящие ПАВ, ребенок не может самостоятельно сделать первого вдоха. К сожалению, до сих пор много новорожденных во всем мире умирает, так и не сделав своего первого вдоха, из-за недостатка или отсутствия в их альвеолах ПАВ.

Исключение из правил

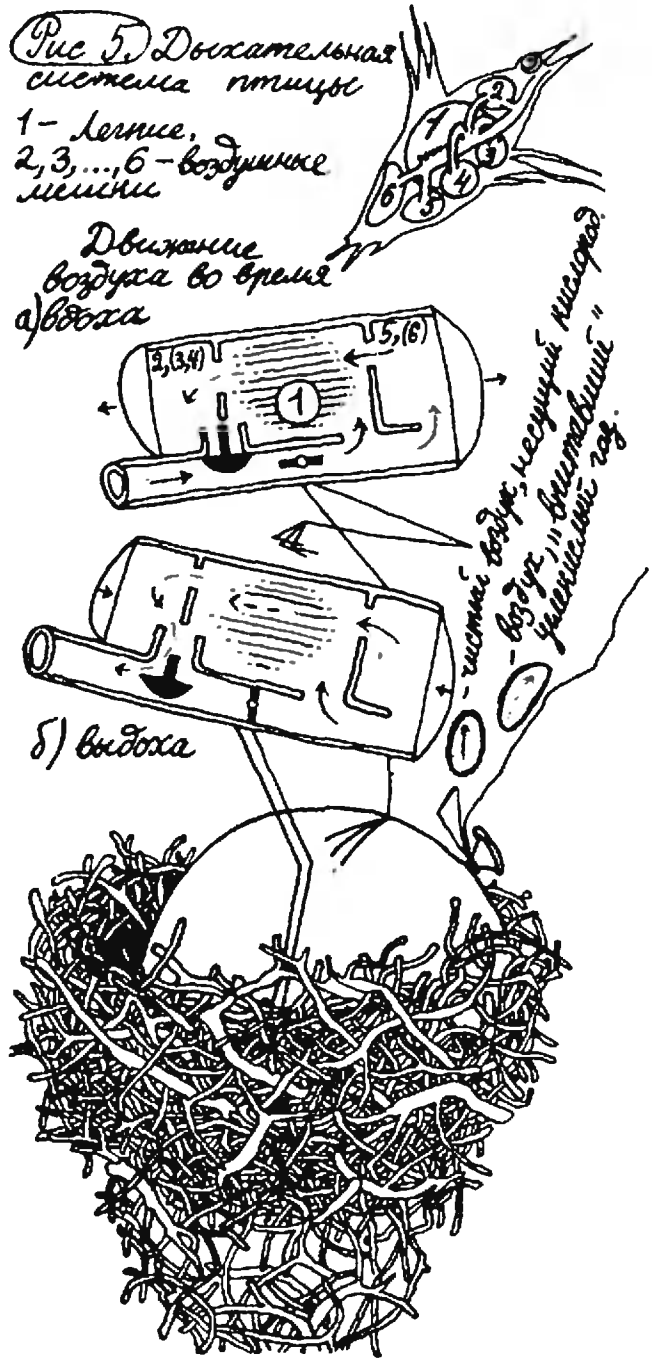
Однако многие животные, дышащие легкими, совсем не страдают от того, что в их альвеолах нет ПАВ. В первую очередь это относится к холоднокровным — лягушкам, ящерицам, змеям, крокодилам и т. д. Так как этим животным не надо тратить энергию на обогрев собственного организма, их потребности в кислороде в среднем в десять раз меньше, чем у теплокровных. Поэтому и поверхность легких, через которую происходит газообмен между кровью и воздухом, у холоднокровных меньше, чем у теплокровных. Относительное уменьшение площади поверхности легкого, приходящейся на единицу его объема, у холоднокровных связано с увеличением приблизительно в десять раз диаметра их альвеол по сравнению с альвеолами теплокровных. Относительно большой радиус альвеол позволяет легко раздувать их даже в отсутствие на их внутренней поверхности ПАВ (ведь $\Delta p \sim 1/R$).

Второй группой животных, в легких которых отсутствуют ПАВ, являются птицы. Птицы — теплокровные и ведут довольно бойкий образ жизни. Энергетические затраты птиц и млекопитающих одинакового веса близки между собой. Высоки и потребности птиц в кислороде. Причем легкие птиц обладают уникальной способностью насыщать кровь кислородом при полете на большой высоте (около 6000 м), где его концентрация в воздухе падает в два раза по сравнению с концентрацией на уровне моря. Любое млекопитающее (в том числе и человек) на такой высоте начинает испытывать недостаток кислорода, резко ограничивает свою двигательную активность, а иногда даже впадает в полубморочное состояние. Как же удается легким птицы, не имеющим ПАВ, дышать и насыщать кровь кислородом? Почему это не получается у млекопитающих?

Займемся самокритикой. Чем плохи наши легкие? Во-первых, не весь вдыхаемый воздух участвует в газообмене с кровью: воздух, оказавшийся в конце вдоха в трахее и бронхах, не сможет отдать кислород в кровь и взять оттуда углекислый газ, так как в этих местах легкого практически отсутствуют кровеносные сосуды. Поэтому часть объема легких, занимаемую трахеей и бронхами, принято называть «мертвым пространством». Обычно «мертвое пространство» легких человека имеет объем около 150 см³. Можно искусственно увеличить объем «мертвого пространства», если заставить себя дышать через длинную трубку. Каждый, кто пытался так делать, наверное, заметил, что при этом необходимо увеличивать глубину дыхания (объем вдыхаемого воздуха). Очевидно, что если объем «мертвого пространства» сделать равным максимально возможному вдоху (около 4,5 дм³), то человек начнет задыхаться, так как свежий воздух вообще перестанет поступать в альвеолы. Таким образом, существование «мертвого пространства» в дыхательной системе млекопитающих является «ошибкой» Природы.

Создавая легкие млекопитающих, Природа, по нашему мнению, сделала и вторую «ошибку». Этот недостаток связан с тем, что движение воздуха в легких меняет свое направление при переходе от вдоха к выдоху. Поэтому почти половину времени легкие практически бездействуют — во время выдоха свежий воздух в альвеолы не поступает.

А вот у птиц Природа вновь достигла совершенства. Помимо обычных легких, у птиц есть дополнительная система, состоящая из пяти и более пар воздушных мешков, связанных с легкими (рис. 5). Полости этих мешков широко разветвляются в теле и заходят в некоторые кости, иногда даже в мелкие кости фаланг пальцев. В результате дыхательная система утки занимает около 20 % объема тела (2 % — легкие и 18 % — воздушные мешки), в то время как у человека — лишь 5 %. Легкое птицы, в отличие от легкого млекопитающего, представляет собой совокупность параллельно соединенных открытых с двух сторон тоненьких трубочек, окруженных кровенос-



ными сосудами. Соединение мешков с легкими таково, что во время вдоха воздух через легкое птицы течет в том же направлении, что и при выдохе. Поэтому во время дыхания у птиц изменяются только объемы воздушных мешков, а объем легкого остается практически постоянным. А раз нет необходимости раздувать легкое, то не нужны и поверхностно-активные вещества в птичьих легких.

Вот как много интересного можно рассказать в ответ на, казалось бы, простой вопрос — как мы дышим.

У нас в гостях
стенгазета

У нас в гостях стенгазета «Андромеда» ФАЛТа МФТИ

ФАЛТ — это факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института. Подробно о нем рассказано в «Кванте» №5 за 1975 год. А сегодня мы предоставляем страницу нашего журнала отделу юмора студенческой стенгазеты этого факультета.



О целых и дробях

В надкушенном яблоке лучше обнаружить целого червяка, чем его половину.

Объявление

Меняю один большой камень на два маленьких. Сизиф.

Об электричестве

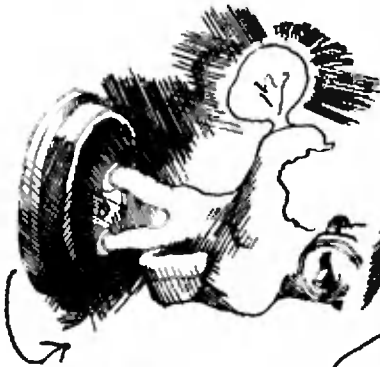
Если Вы хотите включить электрическую лампочку, то:

1. Вставьте вилку от лампочки в штепсельную розетку.
2. Нажмите на кнопку выключателя.
3. Убедитесь, что свет зажегся.

4. Подождите несколько минут, а затем, поплевав на палец, дотроньтесь им до лампочки — при правильном включении она должна быть горячей.

Совет

Электрическая лампочка долго не перегорает, если смазать вольфрамовую нить подсолнечным маслом.



Как сделать барометр

Материалы:

1. Березовый кол.
2. Фанера
3. Веревка.
4. Гвозди.

Изготовление: согласно прилагаемому чертежу.

Принцип действия.

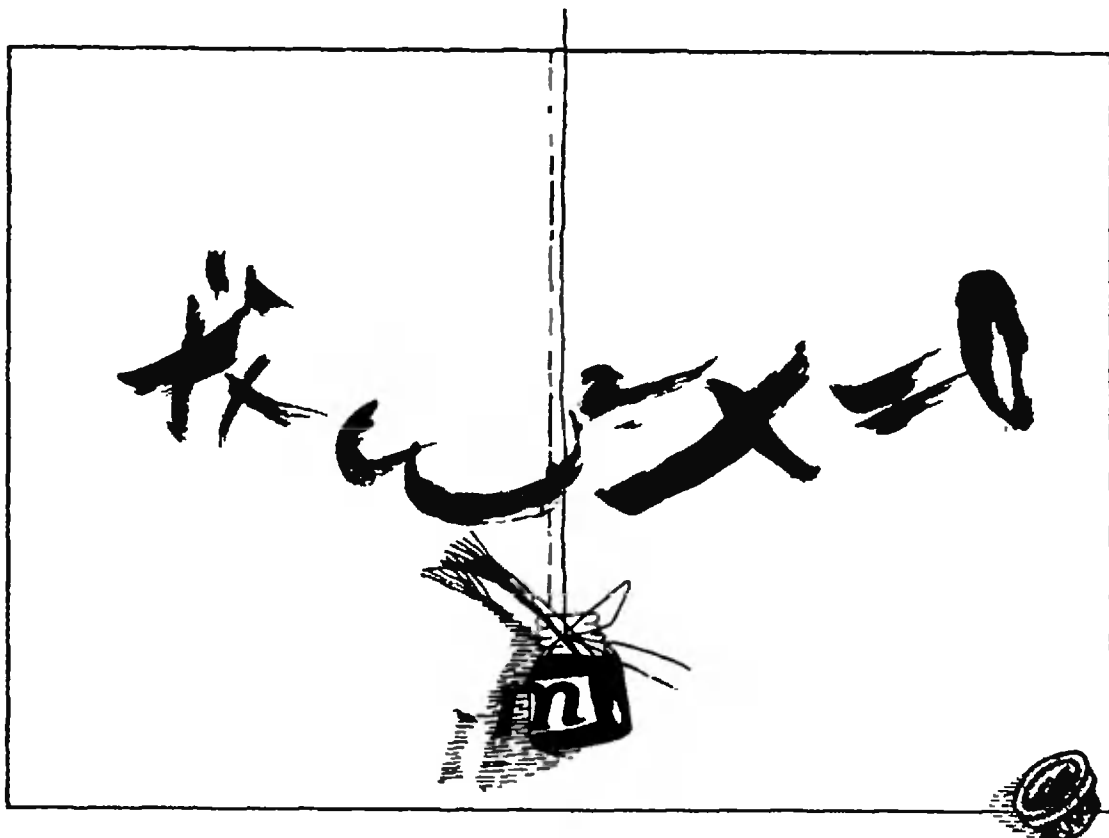
1. Хвост дрожит — ветер.
2. Хвост не дрожит — нет ветра.
3. Хвост стоит дыбом — перед грозой.
4. С хвоста капает — дождь.
5. От хвоста падает тень — солнечно.
6. Тени от хвоста нет — пасмурно.
7. На хвосте иней — мороз.
8. Хвоста не видно — туман.



Новости

В магазин «Детский мир» местного горпромторга поступили в продажу малогабаритные аэродинамические трубы на $M=20$ непрерывного действия с Re до 10^8 . Игра заинтересует старших и млад-

ших научных сотрудников. (Примечание для незнающих: M — число Маха, равно отношению скорости течения газа к скорости звука в этом газе; Re — число Рейнольдса, см. физический энциклопедический словарь.)



О математике гармонических колебаний

Кандидат физико-математических наук
А. П. ВЕСЕЛОВ

Колебания и волны являются основным, по представлению физика-теоретика, средством познания реального мира. Колебаться может все — любые предметы, жидкость и газы; свет, звук, нервные импульсы в конечном итоге являются видами колебаний.

Академик С. П. Новиков

Маятниковые часы, океанские волны, качели, смена дня и ночи, сезонные изменения в природе — каждый из вас может добавить к этому списку массу других примеров колебательных явлений. Подобно многим эволюционным процессам^{*)}, они допускают описание на математическом языке дифференциальных уравнений. Среди всех дифференциальных уравнений, описывающих колебания той или

иной системы, простейшим (а поэтому и важнейшим) является уравнение *линейного осциллятора* (от латинского oscillatio — колебания) (или гармонического осциллятора, или гармонических колебаний, или малых колебаний маятника):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (*)$$

Здесь \ddot{x} обозначает вторую производную $\dot{x} = x'(t)$ по времени t от функции $x = x(t)$, описывающей отклонение системы от положения равновесия, а ω^2 — некоторый (разумеется, положительный) параметр.

Мы расскажем здесь, откуда и как получается уравнение линейного осциллятора — хотя десятиклассники уже знают об этом из курса физики («Физика 10», п. 4) — а затем займемся его исследованием с математической точки зрения.

Где появляется уравнение линейного осциллятора?

Где только это уравнение не появляется! Посудите сами.

1. Малые колебания маятника. Пусть на тонкой нерастяжимой нити длины l подвешен грузик массы m , размерами которого (а со-

^{*)}См. статью В. И. Арнольда в «Кванте» № 2 этого года.

ответственно и сопротивлением воздуха) можно пренебречь. Такая система называется *математическим маятником*. Рассмотрим его качания при небольших отклонениях нити от вертикали, то есть малых α (рис. 1). Обозначим через x длину дуги BA : $x=l\alpha$ (α — величина угла BOA в радианах). Тогда, разлагая силу тяжести $P=mg$ на две составляющие T и F (см. рис. 1), находим, что величина F равна $mg \sin \alpha$, а уравнение движения по закону Ньютона дает

$$ml\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha,$$

или

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \sin \alpha.$$

Получим (нелинейное) уравнение относительно отклонения $\alpha = \alpha(t)$. Воспользуемся теперь малостью α , пределом $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sin \alpha / \alpha) = 1$ и заменим в правой части $\sin \alpha$ на α , то есть проведем *линеаризацию*. В результате получим (линейное) уравнение вида (*) с $\omega = \sqrt{g/l}$.

2. Тело на пружинке (рис. 2). При отклонении от положения равновесия на некоторое x тело испытывает по закону Гука со стороны пружины силу $F = -kx$, где k — величина, называемая *жесткостью* пружины. Уравнение движения совпадает с (*) при $\omega = \sqrt{k/m}$. Конечно же, и здесь выражение для силы (а значит, и уравнение (*)) будет точным лишь для не очень больших отклонений от положения равновесия.

3. Колебательный контур (рис. 3), состоящий из конденсатора емкости C и индуктивности L . Заряд конденсатора q меняется при отсут-

ствии активного сопротивления по закону $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ («Физика 10», п. 15), что отвечает уравнению (*) для $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

4. Сообщающиеся сосуды. Если в трубке, имеющей форму буквы U (рис. 4), уровень жидкости (например, ртути) отклонить на некоторую величину от положения равновесия, то жидкость начнет поочередно подниматься (и опускаться) в каждом из вертикальных участков трубки. Если начальное отклонение мало (как и трение), отклонение $x = x(t)$ уровня жидкости подчиняется уравнению (*).

5. Ареометр (рис. 5). Если этот прибор, используемый для измерения плотности жидкости, отклонить немного вглубь от положения равновесия, то он, вследствие закона Архимеда, начнет колебаться вверх-вниз. Эти колебания тоже достаточно точно описываются уравнением (*) (во всяком случае, пока не начнет сказываться трение).

Упражнение (для любителей физики). Найдите вывод уравнения (*) для предпоследнего примера (4), выразив ω через подходящие параметры.

Что общего во всех приведенных примерах? Состояние системы описывается одним параметром x , который меняется около своего положения равновесия $x=0$; на систему действует сила $F(x)$, зависящая только от параметра x . В пренебрежении потерями энергии изменение параметра, согласно второму закону Ньютона, имеет вид $\ddot{x} = F(x)$. При этом $F(0) = 0$, поскольку $x=0$ — положение равновесия. Если у функции $F(x)$ суще-

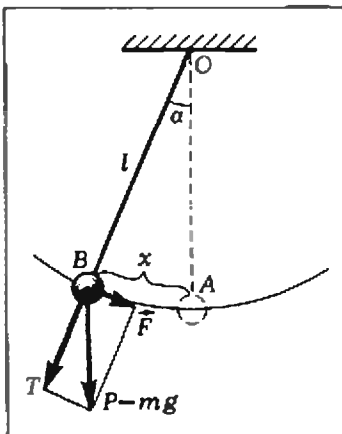


Рис. 1.

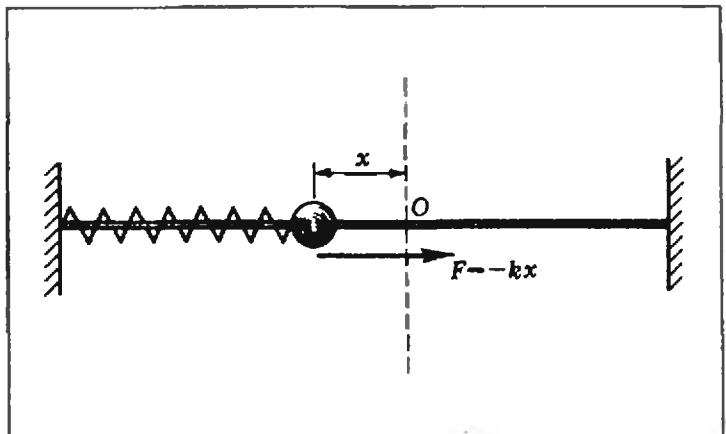


Рис. 2.

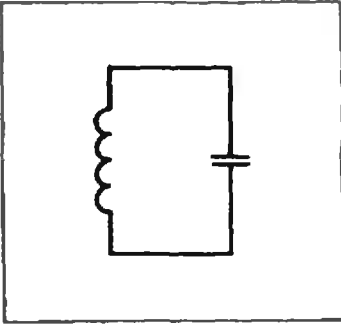


Рис. 3.

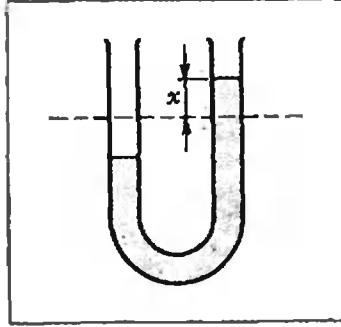


Рис. 4.

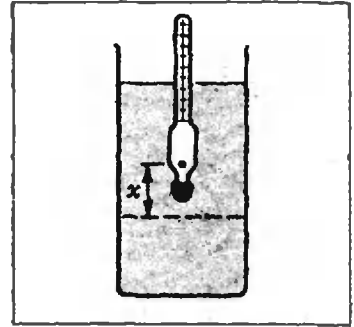


Рис. 5.

стает ненулевая производная в нуле: $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (F(x)/x) = a$, то для малых x мы можем заменить правую часть ($F(x)$) на ax . При этом a обязательно должно быть отрицательным, иначе никакие колебания в окрестности нуля невозможны! Таким образом, мы приходим к линейному уравнению (*), где $\omega = \sqrt{-a} = \sqrt{-F'(0)}$.

Указанная процедура линеаризации, конечно же, приводит к неэквивалентному дифференциальному уравнению, которое тем не менее правильно описывает качественную картину движения вблизи положения равновесия. Этим объясняется универсальность уравнения линейного осциллятора (*), а также его название.

Существование и единственность решения

Как нетрудно проверить, уравнению (*) удовлетворяют функции $x = \cos \omega t$ и $x = \sin \omega t$, а следовательно, и их линейные комбинации, то есть выражения вида

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (**)$$

(проверьте это!) *. Покажем, что других решений у этого уравнения нет.

Вспользуемся тем, что в процессе движения сохраняется следующая величина

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \text{const}$$

(закон сохранения энергии).

В самом деле, $\dot{E} = \dot{x}\dot{x} + \omega^2 x\dot{x} = \dot{x}(\dot{x} + \omega^2 x) = 0$, откуда следует, что $E = \text{const}$.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (*): $x = x_1(t)$ и его начальные данные $a = x_1(0)$ и $\beta = \dot{x}_1(0)$. Подберем коэффициенты a и b в выражении $x_2 = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, так что $x_2(0) = a$, $\dot{x}_2(0) = \beta$. Для этого достаточно положить $a = a$, $b = \beta/\omega$. Составим теперь разность $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, кото-

рая тоже будет решением (*) (проверьте это). Ее начальные данные будут нулевыми: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. В силу закона сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2(t) + \omega^2 x^2(t)) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2(0) + \omega^2 x^2(0)) = 0.$$

откуда $\dot{x}(t) = x(t) = 0$, то есть

$$x_1(t) = x_2(t) = a \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t.$$

Мы показали, что любое решение $x_1(t)$ имеет вид (**), где a и b однозначно определяются начальными данными. В процессе доказательства мы получили и формулу для решения через начальные данные.

Бег по кругу на фазовой плоскости

Обратим внимание на следующее обстоятельство, достойное удивления. В уравнении (*) совершенно неожиданным образом оказалось запрятано число π , хотя ни о какой окружности в постановке задачи речи не было. В самом деле, все решения уравнения (*) (за исключением $x(t) = 0$) оказались периодическими функциями времени, причем произведение периода их на ω равно 2π ! Раз уж возникло число π , то попробуем поискать и окружность.

Где ее искать? Мы будем ее искать на фазовой плоскости, то есть на плоскости с координатами $(u; v)$, где $u = x$, $v = \dot{x}$. Точки $(u; v)$ этой плоскости называются фазовыми точками; они описывают состояние системы: координата $u = x$ указывает отклонение системы от положения равновесия, а координата $v = \dot{x}$ — скорость ее движения в данный момент времени. С течением времени положение фазовой точки $(u; v) = (x(t); \dot{x}(t))$ меняется, и она описывает некоторую линию на фазовой плоскости, называемую фазовой траекторией. Какую?

В связи с этим уравнение () иногда называют уравнением синуса и косинуса.

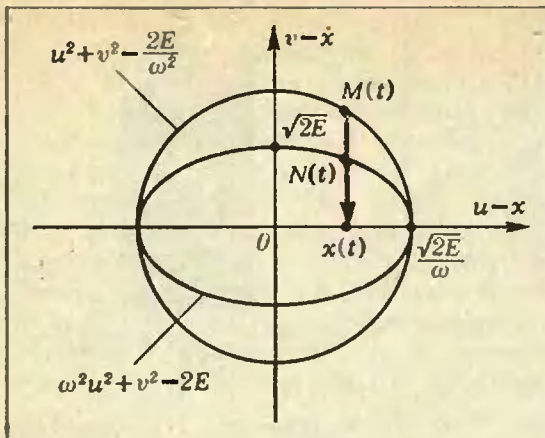


Рис. 6.

Догадливый читатель наверняка подумал — не окружность ли?

Не будем опережать события. Пока у нас есть лишь эллипс — линия уровня энергии $E = \text{const}$, то есть линия

$$\omega^2 u^2 + v^2 = 2E \quad (1)$$

(на двойку мы умножили, чтобы не возиться с ненужными дробями), показанная на рисунке 6. В силу закона сохранения энергии фазовая точка $N(t) = (x(t); \dot{x}(t))$, имеющая в момент времени t энергию E , будет всегда оставаться на эллипсе (1), то есть будет двигаться по эллипсу.

Построим на его горизонтальной оси как на диаметре окружность и проведем через фазовую точку $N(t)$ прямую, параллельную оси Ov , до пересечения с окружностью в точке $M(t)$. Тогда координата по оси x точки $N(t)$ будет совпадать с координатой по оси x точки $M(t)$, то есть будет равна $x(t)$.

Преобразуем выражение (**) для $x(t)$, пользуясь формулами дополнительного аргумента:

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где φ определяется из условий

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

Обозначив $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, можно заметить, что

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \beta^2 / \omega^2} = \\ &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\beta^2 + \omega^2 a^2} = \\ &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{x}^2(0) + \omega^2 x^2(0)} = \sqrt{2E} / \omega. \end{aligned}$$

Поэтому $x(t)$ можно записать в виде

$$x(t) = \frac{\sqrt{2E}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Величина $A = \sqrt{2E} / \omega$, характеризующая раз-

мах гармонических колебаний, называется амплитудой, ω — циклической частотой, $T = 2\pi / \omega$ — периодом, φ — фазой.

Теперь легко установить, что точка $M(t)$ будет вращаться равномерно с угловой скоростью ω по окружности с центром O радиуса A . Действительно, если через φ обозначить угол $\angle uOM$ в момент времени $t=0$, то угол $\angle uOM(t)$ равен $\omega t + \varphi$ в силу того, что проекция на ось Ou точки $M(t)$ задана формулой (4). Мы установили, что гармонические колебания представляют собой проекцию на прямую равномерного вращения по окружности, радиус которой равен амплитуде колебаний, а угловая скорость вращения равна циклической частоте.

Эквивалентный взгляд состоит в том, что гармоническое колебание есть одна из координат равномерно вращающегося вектора (в данном случае — \vec{OM}). Длина этого вектора совпадает с амплитудой, а начальное положение определяется фазой. Такое представление колебания называется его *векторной диаграммой* и часто бывает полезным. Попробуйте с его помощью решить следующие задачи.

Задача 1. Докажите, что сумма двух ненулевых гармонических колебаний есть гармоническое колебание тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую частоту (или, как говорят, *когерентны*). При каком соотношении фаз сумма двух когерентных колебаний имеет максимальную амплитуду? Минимальную? Что можно сказать о произведении гармонических колебаний?

Задача 2. Докажите, что сумма трех гармонических колебаний одинаковой амплитуды и частоты, фазы которых суть φ , $\varphi + (2\pi/3)$ и $\varphi + (4\pi/3)$, равна нулю.

Последнее обстоятельство играет важную роль при использовании трехфазного тока, поскольку именно такие колебания дает трехфазный генератор переменного тока. Кстати, на векторной диаграмме вы найдете объяснение, почему отношение стандартных напря-

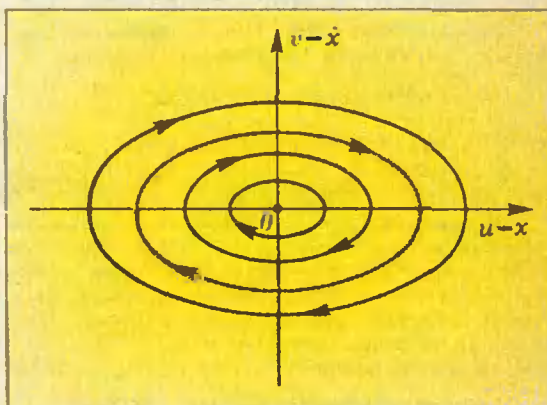


Рис. 7.

жений 220 вольт и 127 вольт приблизительно равно $\sqrt{3}$.

Задача 3. Сколько корней на отрезке $[0, 2]$ имеет уравнение

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos(x+a_1) + \frac{1}{4} \cos(x+a_2) + \dots + \frac{1}{2^n} \cos(x+a_n) = 0$$

(a_1, \dots, a_n — произвольные параметры)?

Итогом нашего исследования уравнения (*) является рисунок 7. Такие рисунки математики называют фазовыми портретами или фазовыми диаграммами дифференциального уравнения. На нашей диаграмме видно, что каждая фазовая точка бежит по своему эллипсу (отвечающему ее уровню энергии), при этом отклонение от положения равновесия $x(t)$ меняется периодически, также как и скорость $\dot{x}(t)$, достигающая своих максимальных значений в положении равновесия. Обратим внимание на следующее замечательное свойство гармонического осциллятора: период его колебаний не зависит от амплитуды! Это свойство является исключительным, что можно видеть уже на примере математического маятника, к которому мы и перейдем.

О математике математического маятника

Остановимся на теории математического маятника, отказавшись теперь от предположения малости колебаний (но по-прежнему считая, что трения нет). Уравнение движения в этом случае нам уже известно:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0. \quad (***)$$

Хотя по виду уравнение (***) не сильно отличается от уравнения (*) линейного осциллятора, оно уже нелинейно, и решить его совсем не так просто. Более того, выписать его решение с помощью известных в школе функций вообще нельзя, — для этого требуются специальные функции, называемые эллиптическими. Как быть?

Получить представление о решениях уравнения (***) и о поведении математического маятника можно с помощью его фазового портрета (рис. 8), который строится с помощью закона сохранения энергии. Рассмотрим этот портрет.

Три жирные точки на оси Ox отвечают положениям равновесия — устойчивому (начало координат) и неустойчивому

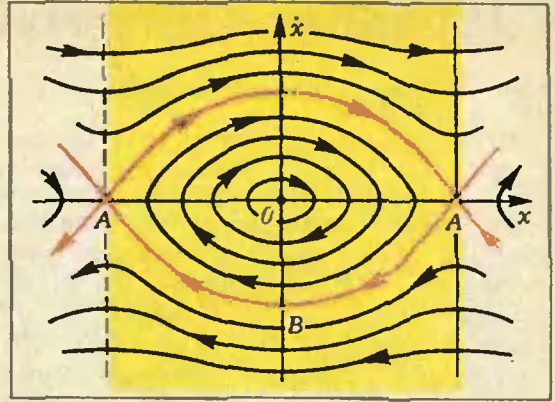


Рис. 8.

(точка $A(\pi; 0)$), то есть крайнему нижнему и крайнему верхнему положениям маятника. Расширяющиеся овалы около точки O устойчивого равновесия отвечают различным режимам колебания маятника (с различной амплитудой); вблизи точки O они на глаз не отличимы от эллипсов — фазовых траекторий уравнения (*). Обход такого овала (большого или малого) отвечает целому периоду колебания маятника, его пересечения с осью Ox — проход через устойчивое положение равновесия с максимальной скоростью, пересечения с осью Ox — крайнее отклонение маятника (нулевая скорость). Волнистые траектории в нижней и верхней частях рисунка — это неравномерные вращения маятника, получающиеся, когда начальный толчок настолько силен, что маятник достигает верхнего положения равновесия с ненулевой скоростью, проскакивает его и продолжает вращаться, достигая экстремальных значений скорости при проходе через положения равновесия. Красным цветом показаны фазовые траектории, отделяющие колебательные движения от вращательных. Эти траектории отвечают движению с уровнем энергии E_0 , равным потенциальной энергии маятника в верхнем (неустойчивом) положении равновесия $A(\pi; 0)$. При таком движении маятник проходит нижнее положение равновесия $B(0; v_0)$ с максимальной скоростью $v_0 = \sqrt{2E_0/m}$ и, постепенно замедляясь, подходит к верхнему положению равновесия; можно доказать, что он его достигает (с нулевой скоростью) лишь за бесконечный промежуток времени.

Заключение

Мы немного познакомились со свойствами линейного и нелинейного осцилляторов. Пожалуй, самое удивительное в осцилляторе — это его многоликость и универсальность: трудно перечислить все те простые и разнообразные физические системы, которые описываются уравнениями (*) и (***) . Осциллятор входит и во многие сложные системы. Например,

(Окончание см. на с. 43)

Парадокс спутника

Кандидат физико-математических наук
Ю. Г. ПАВЛЕНКО

При движении искусственных спутников Земли в верхних слоях атмосферы они испытывают тормозящее действие воздуха. До запусков ИСЗ сведения о плотности атмосферы на высотах до 200 км были получены благодаря полетам геофизических ракет. Позднее анализ движения ИСЗ позволил уточнить эти данные (они приведены в «таблице» на развороте).

Сила сопротивления, действующая на спутник в верхних слоях атмосферы, обусловлена столкновениями



с молекулами воздуха. Эта сила направлена противоположно скорости, и ее можно записать в виде

$$\vec{F}_c = -k\vec{v},$$

где коэффициент k положительный и, вообще говоря, сам зависит от скорости. Он тем больше, чем больше площадь поперечного сечения тела S и плотность атмосферы ρ .

Сравним величины ускорений, сообщаемых спутнику силой сопротивления и силой притяжения. Предположим, что спутник массы $m=100$ кг имеет форму шара с сечением $S=1$ м² и движется по круговой орбите на высоте $h=160$ км со скоростью $v=8$ км/с. Для приближенных расчетов можно считать, что $k=S_1 v$. В этом случае абсолютное значение ускорения, обусловленного силой сопротивления,

$$a_c = \frac{kv}{m} \approx \frac{S_1 v^2}{m} \approx 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

Сила притяжения $F = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$, дейст-

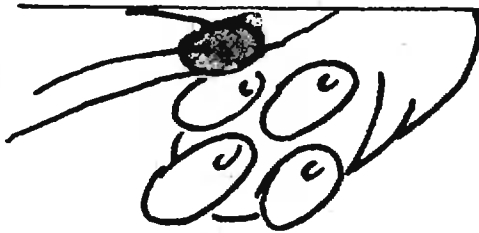
вующая на спутник со стороны Земли ($M=5976 \cdot 10^{21}$ кг — масса Земли, $R=6371$ км — ее средний радиус), сообщает ему ускорение, направленное к центру Земли и равное

$$a_n = G \frac{M}{(R+h)^2} \approx 9,33 \text{ м/с}^2.$$

Как видно, «тормозное» ускорение составляет примерно одну пятнадцатитысячную часть от центростремительного. И тем не менее влияние атмосферы на высоте 160 км оказывается настолько существенным, что, совершив один-два оборота, спутник начинает быстро снижаться.

Первый советский ИСЗ имел форму шара диаметром 58 см и массу 83,6 кг. Ракета-носитель была значительно больше по размерам. Казалось бы, поскольку ракета испытывает большее сопротивление (у нее больше S), после выхода на орбиту она должна отставать от спутника. Однако наблюдения показали, что ракета-носитель значительно опережала спутник. Попробуем разобраться в этом «парадоксе».

Движение спутников в настоящее время рассчитывают на ЭВМ, исходя из законов Ньютона. Для решения этой задачи в случае, когда сила сопротивления зависит от скорости тела, школьных знаний математики недостаточно. Мы объясним «парадокс» спутника на основе энергетических соображений. Если бы сопротивление отсутствовало, то полная механическая энергия спутника E



оставалась бы постоянной:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left(-G \frac{Mm}{r}\right) = \text{const} \quad (1)$$

(здесь $\left(-G \frac{Mm}{r}\right)$ — потенциальная энергия спутника, находящегося на

расстоянии r от центра Земли *)). При наличии сопротивления механическая энергия уже не остается постоянной величиной, а зависит от времени: $E=E(t)$. Ее приращение

энергию (см. (1)) можно представить в виде

$$E = \frac{mv^2}{2} + (-mv^2) = -\frac{mv^2}{2}.$$

Найдем отсюда производную энергии по времени: $E' = (-mv)v'$; подставив это выражение в (3), получим

$$mv' = kv.$$

Отсюда видно, что скорость спутника со временем растет по величине (производная $v' > 0$). Она растет тем быстрее, чем больше отношение k/m . Оказывается, что для ракеты-носителя эта величина больше, чем для спутника, и, следовательно, скорость ракеты увеличивается быстрее. Вот почему ракета-носитель после вывода спутника на орбиту обогнала его.

Из рассмотренных нами соотношений можно сделать вывод о том, как под влиянием атмосферы происходит изменение энергии спутника на орбите. Действие силы сопротив-

равно работе сил сопротивления:

$$\Delta E = \Delta A_c. \quad (2)$$

Работа силы сопротивления на малом перемещении $\Delta s = v \cdot \Delta t$ равна $-kv^2 \times \Delta t$. Подставляя это выражение в (2) и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим закон изменения механической энергии спутника:

$$E' = -kv^2 \quad (3)$$

(E' — производная энергии по времени).

Итак, спутник выведен на круговую орбиту радиуса r . Если сопротивление отсутствует, то из второго закона Ньютона можно найти скорость спутника на круговой орбите радиуса r :

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r}. \quad (4)$$

Влияние атмосферы приводит к тому, что траектория спутника становится не окружностью, а спиралеобразной кривой. Если эта траектория незначительно отличается от окружности, то можно считать, что в любой момент времени связь скорости $v(t)$ и расстояния до спутника $r(t)$ имеет форму (4). Однако теперь скорость и «радиус окружности» являются функциями времени.

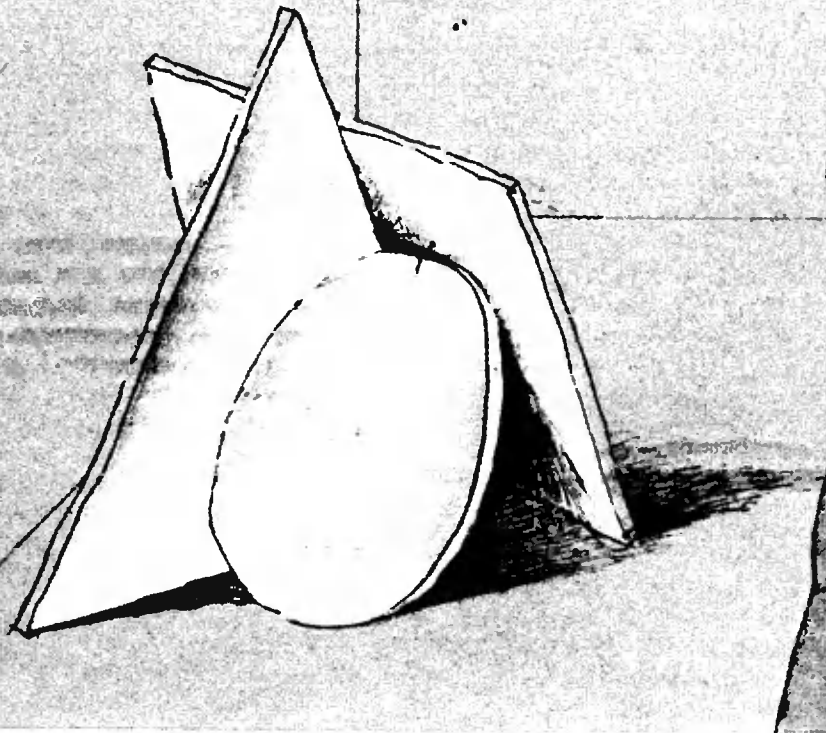
Учитывая выражение (4), потенциальную энергию спутника можно записать в виде $\Pi = -G \frac{Mm}{r} = -mv^2$.

Следовательно, полную механическую

* Вывод выражения для потенциальной энергии в поле тяготения приведен в заметке «Вторая космическая скорость» раздела «Школа в «Кванте» в мартовском номере журнала. (Примеч. ред.)

ления приводит к тому, что спутник начинает «падать». При этом его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия растут по мере приближения к Земле, а потенциальная энергия убывает (оставаясь отрицательной). Из выражения (3) видно, что полная механическая энергия также уменьшается. Следовательно, убывание потенциальной энергии идет быстрее, чем рост кинетической.

Таким образом, в результате взаимодействия с атмосферой ИСЗ, не имеющие специальной системы посадки, при снижении ускоряют свое движение. Попадая в плотные слои атмосферы, они сгорают. Вот почему теперь на небе чаще можно увидеть падающую звезду и ... загадать желание.



Используя площадь...

В. В. ПРАСОЛОВ

При решении различных математических задач часто бывает полезно рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Мы разберем основные приемы решения геометрических задач при помощи площади.

Прием 1. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то сумма их площадей равна площади исходного многоугольника.

Наиболее знаменитым применением этого приема является одно из многочисленных доказательств теоремы Пифагора.

Пример 1 (теорема Пифагора). Докажите, что сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины гипотенузы.

Решение. Пусть a , b — длины катетов, c — длина гипотенузы. Докажем, что сумма площа-

дей квадратов со сторонами a и b равна площади квадрата со стороной c . Рассмотрим для этого квадрат со стороной $a+b$ и разрежем его двумя способами, как показано на рисунке 1. В первом случае этот квадрат распадается на 4 прямоугольных треугольника с катетами a и b и два квадрата со сторонами a и b (это достаточно очевидно), а во втором — на 4 прямоугольных треугольника с катетами a и b и квадрат со стороной c (это требует некоторого обоснования, например, такого: ясно, что все стороны полученного четырехугольника равны c , а углы легко вычисляются).

Пример 2. Из точки O , лежащей внутри правильного треугольника ABC , опущены перпендикуляры OA_1 , OB_1 , OC_1 на стороны BC , AC , AB соответственно. Докажите, что сумма $OA_1 + OB_1 + OC_1$ не зависит от положения точки O и равна высоте треугольника.

Решение. Пусть длина стороны треугольника ABC равна a , а длина высоты — h . Ясно, что $S_{ABC} = S_{BCO} + S_{ACO} + S_{ABO}$ то есть $\frac{1}{2} ah =$

$$= \frac{1}{2} aOA_1 + \frac{1}{2} aOB_1 + \frac{1}{2} aOC_1. \text{ Поэтому } h = OA_1 + OB_1 + OC_1.$$

Пример 3. Многоугольник, описанный около окружности радиуса r , разрезан произвольным образом на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r .

Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей полученных треугольников через r_1, \dots, r_n , их периметры — через P_1, \dots, P_n , площади — через S_1, \dots, S_n . Площадь и периметр исходного многоугольника обозначим через S и P . Поскольку $P_i < P$,

$$r_1 + \dots + r_n = \frac{2S_1}{P_1} + \dots + \frac{2S_n}{P_n} > \frac{2S_1}{P} + \dots + \frac{2S_n}{P} = \frac{2S}{P} = r.$$

Прием 2. Отношение длин отрезков можно заменить на отношение площадей треугольников.

Пример 4. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки C_1 и B_1 соответственно. Пусть O — точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1 (рис. 2). Вычислите $\frac{BO}{B_1O}$, если

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \alpha \text{ и } \frac{CB_1}{AB_1} = \beta.$$

Решение. Прежде чем приступить к решению этой весьма часто применяющейся задачи, отметим ее некоторую странность. В самом деле, для любого треугольника ABC можно взять точки B_1 и C_1 , делящие его стороны AC и AB в заданных отношениях. Почему же в условии не задан вид треугольника ABC , а заданы лишь $\frac{BC_1}{AC_1}$ и $\frac{CB_1}{AB_1}$?

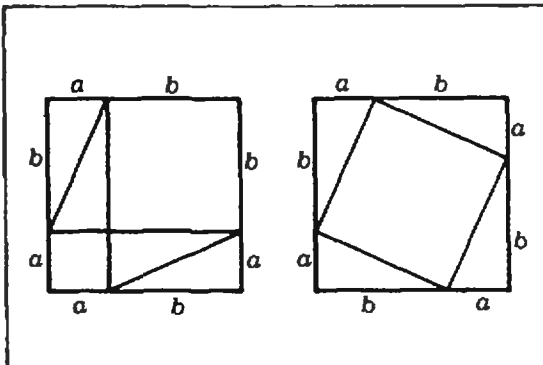


Рис. 1.

Переходим к решению. Ясно, что

$$\frac{BO}{B_1O} = \frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}}. \text{ Вычислим теперь}$$

$$\frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC}} \text{ и } \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}. \text{ Ясно, что } \frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC}} = \frac{AC}{B_1C} = \frac{AB_1 + B_1C}{B_1C} = 1 + \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Поскольку треугольники BOC и AOC имеют общую сторону OC , отношение их площадей равно отношению длин высот, опущенных на OC . Отношение высот равно, в свою очередь, $\frac{BC_1}{AC_1}$. По-

этому $\frac{S_{BOC}}{S_{AOC}} = \frac{BC_1}{AC_1}$. В итоге получаем,

$$\text{что } \frac{BO}{B_1O} = \frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC}} = \alpha \left(1 + \frac{1}{\beta} \right).$$

Пример 5 (теорема Чевы). На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

Решение. Пусть сначала прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Как и в предыдущей задаче, получаем $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{S_{ACO}}{S_{ABO}}$,

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{S_{BCO}}{S_{ACO}} \text{ и } \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{S_{ABO}}{S_{BCO}}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Предположим теперь, что $\frac{AB_1}{B_1C} \times \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, и пусть O — точка

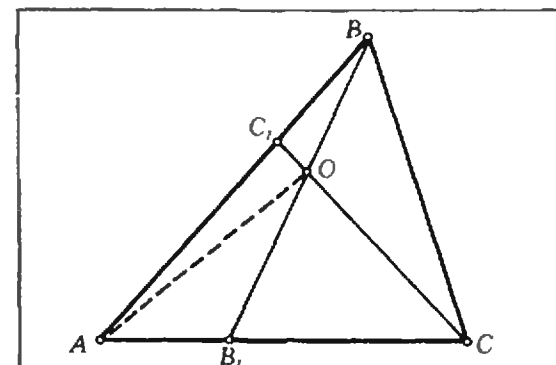


Рис. 2.

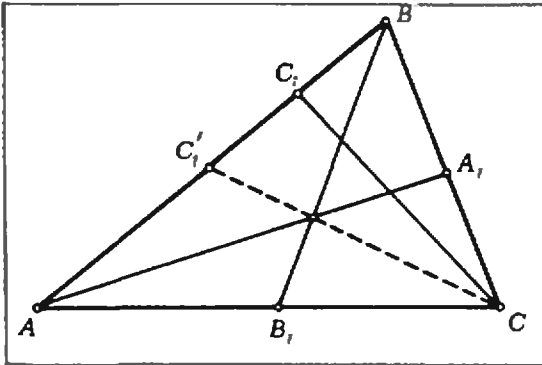


Рис. 3.

пересечения отрезков AA_1 и BB_1 . Обозначим через C_1' точку пересечения прямой OC с отрезком AB (рис. 3). Тогда, как мы только что доказали,

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1'}{C_1'A} = 1 = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1'A}.$$

Следовательно, $\frac{BC_1'}{C_1'A} = \frac{BC_1}{C_1'A}$. Остается заметить, что если точка X движется по отрезку AB (не выходя за его пределы), то величина $\frac{BX}{XA}$ изменяется монотонно, и поэтому $C_1' = C_1$, то есть прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Эта замечательная теорема заслуживает того, чтобы сделать по ее поводу некоторые комментарии. Читатели, знающие, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке, а также и все биссектрисы, и все высоты, могли заподозрить, что все эти факты — следствия какой-то более общей теоремы. Это действительно так: они являются следствиями теоремы Чевы, получающимися из нее достаточно простыми вычислениями. Легко также доказать, что в одной точке пересекаются отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности со сторонами.

С высотами есть, впрочем, одна сложность: если угол C треугольника ABC тупой, то высота, опущенная из C , попадает не на сторону AB , а на ее продолжение. Оказывается, что теорему Чевы можно переформулировать (и, конечно, доказать) так, чтобы она оставалась верной и в том случае, когда точки A_1 , B_1 , C_1 берутся не на сторонах BC , CA , AB , а на прямых BC , CA , AB . Для этого нужно

отношениям длин отрезков приписать знаки \pm в зависимости от того, в одну или в разные стороны направлены соответствующие векторы (в формулировке теоремы Чевы участвуют лишь отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой). Мы советуем читателям самостоятельно придумать нужную формулировку.

Пример 6. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2\dots A_n$. На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2 , на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3 и т. д. таким образом, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1, \dots, A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, \dots, A_nC_n пересекутся в одной точке O . Докажите, что $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \dots \cdot A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \dots \cdot A_nD_n$.

Решение. Так как $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм и точка O лежит на продолжении его диагонали A_1C_1 , из равенства площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1D_1$ и соображений подобия следует, что $\frac{A_1B_1}{A_1D_1} = \frac{h_i}{h_{i-1}}$, где h_i — расстояние от точки O до стороны A_iA_{i+1} . Нам остается перемножить эти равенства для $i=1, \dots, n$.

Прием 3. Различные формулы для площади позволяют получить соотношения между сторонами, высотами, периметром и т. д.

Пример 7. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности этого треугольника равен $1/3$ одной из высот.

Решение. Пусть длины сторон a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Тогда полупериметр p равен $\frac{3}{2}b$. Поскольку $\frac{1}{2}h_b \cdot b = S = r \cdot p = \frac{3}{2}r \cdot b$, получаем $r = b/3$.

Пример 8. Внутри треугольника ABC взята точка M . Обозначим расстояния от точки M до вершин A, B, C через R_a, R_b, R_c , а расстояния от точки M до сторон BC, CA, AB — через d_a, d_b, d_c соответственно.

а) Докажите, что $a \cdot R_a \geq c \cdot d_c + b \cdot d_b$.

б) (Неравенство Эрдеша — Морделла.) Докажите, что

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

Решение. а) Опустим из точек B и C перпендикуляры BK и CL на пря-

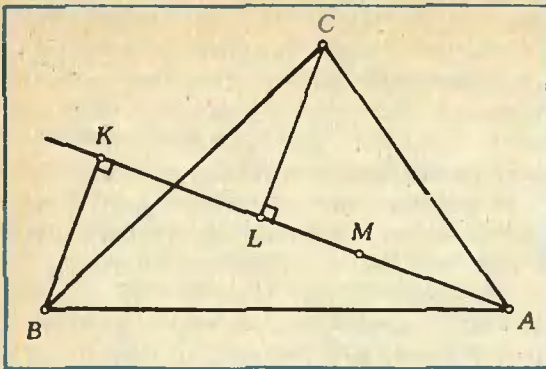


Рис. 4.

мую MA (рис. 4). Пусть $a_1=BK$, $a_2=CL$. Ясно, что $a_1+a_2 \leq a$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a R_a &\geq \frac{1}{2} a_1 R_a + \frac{1}{2} a_2 R_a = \\ &= S_{ABM} + S_{ACM} = \\ &= \frac{1}{2} b d_b + \frac{1}{2} c d_c. \end{aligned}$$

Заметим, что при доказательстве мы использовали только то, что точка M лежит внутри угла BAC , а не то, что точка M лежит внутри треугольника.

б) Применяя неравенство пункта а) к точке, симметричной M относительно биссектрисы угла A (это правомерно ввиду замечания к пункту а)), получаем неравенство

$$R_a \geq \frac{c}{a} d_b + \frac{b}{a} d_c.$$

Аналогично,

$$R_b \geq \frac{c}{b} d_a + \frac{a}{b} d_c \text{ и}$$

$$R_c \geq \frac{a}{c} R_b + \frac{b}{c} R_a.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} R_a + R_b + R_c &\geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) d_a + \\ &+ \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) d_c \geq \\ &\geq 2(d_a + d_b + d_c), \end{aligned}$$

поскольку $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Неравенство Эрдеша — Морделла имеет довольно длинную историю. В 1935 году известный венгерский математик П. Эрдеш выдвинул предположение о том, что справедливо неравенство

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c),$$

однако доказать его не смог. Первым доказал это неравенство английский математик Л. Дж. Морделл

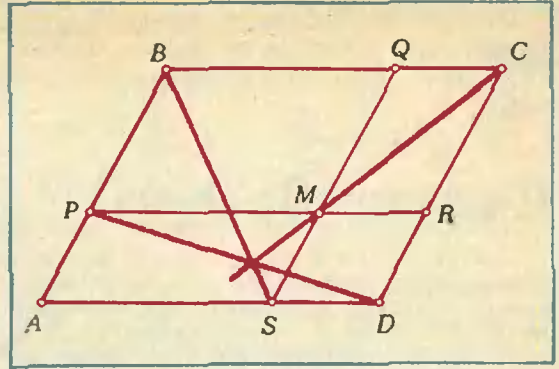


Рис. 5.

в том же 1935 году, но его доказательство было довольно сложным, и лишь усилия многих математиков привели доказательство неравенства Эрдеша — Морделла к такому простому виду, в каком оно здесь изложено.

Прием 4. Если через точку E , лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные сторонам и разбивающие его на четыре параллелограмма, то параллелограммы, прилегающие к вершинам B и D , равновелики тогда и только тогда, когда точка E лежит на диагонали AC .

Мы предлагаем читателям самостоятельно доказать это несложное утверждение.

Пример 9. Через точку M , лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые PR и QS , параллельные сторонам BC и AB (точки P, Q, R, S лежат на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно). Докажите, что прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке (рис. 5).

Решение. Через точку N пересечения прямых BS и CM проведем прямые Q_1S_1 и P_1R_1 , параллельные прямым QS и PR (точки P_1, Q_1, R_1, S_1 лежат на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно). Обозначим точки пересечения прямых PR и Q_1S_1, P_1R_1 и QS через F и G . Поскольку точка M лежит на диагонали NC параллелограмма NQ_1CR_1 , $S_{P_1Q_1M} = S_{MRR_1G}$, то есть $S_{NQ_1QG} = S_{NFRR_1}$. Точка N лежит на диагонали BS параллелограмма $ABQS$, поэтому $S_{AP_1NS_1} = S_{NQ_1QG} = S_{NFRR_1}$. Следовательно, точка N лежит на диагонали PD параллелограмма $APRD$.

(Окончание см. на с. 43)



Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «О судьбе некоторых понятий механики» предназначена восьмиклассникам, «Энергия электрического поля» — девятиклассникам, «Капельная модель ядра» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

О судьбе некоторых понятий механики

Еще в глубокой древности люди пытались найти количественные характеристики механического движения тел. Однако прошло не одно столетие, пока сформировались «удобные» физические понятия.

Так, в XVII веке, когда фактически создавалась классическая механика, с особой остротой встал вопрос о том, какую величину целесообразно использовать как меру движения. Р. Декарт предложил в качестве такого понятия «количество движения», которое, говоря современным языком, означало произведение массы тела на модуль его скорости, и сформулировал «закон сохранения количества движения».

То, что Декарт не учитывал векторного характера скорости, привело к ряду ошибок. В частности, при рассмотрении важной для того времени практической задачи об упругом соударении тел. По Декарту, например, получалось, что если сталкиваются два тела, движущиеся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, и одно тело слегка массивнее другого, то после упругого удара оба тела будут двигаться в направлении первоначального движения более массивного тела. В действительности при упругом соударении шаров с близкими массами они разлетаются в разные стороны.

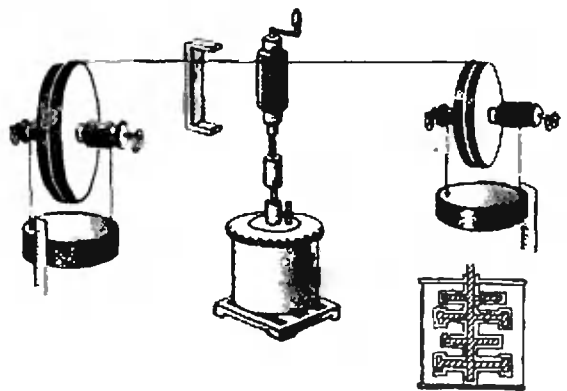
Ошибка Декарта впоследствии была исправлена Х. Гюйгенсом и И. Ньютоном.

Г. Лейбниц, критикуя теорию Декарта, высказал мнение, что более

удобной мерой движения является произведение массы на квадрат скорости тела. Эту величину он назвал «живой силой» и установил «закон сохранения живой силы». Спор о преимуществе того или иного понятия продолжался на протяжении более полувека, пока исследователи не пришли к выводу, что и «количество движения», и «живая сила» необходимы для полного описания явлений, происходящих при взаимодействии тел.

Следующим механическим понятием, вошедшим в науку, было понятие «работы силы», введенное Ж. Понселе в 1826 году. Его появление способствовало и рождению величины, которая теперь называется кинетической энергией, равной половине «живой силы» (Г. Кориолис, 1829 г.): работа силы, действующей на материальную точку, равна разности значений кинетической энергии в конечной и начальной точках пути.

Самый тернистый путь в науку был у понятия «потенциальная энергия». По существу оно возникло вместе с законом сохранения энергии, сформулированным независимо в работах Дж. Джоуля, Р. Майера и Г. Гельмгольца. Интересно, что двое последних по образованию не были физиками — Майер занимался медициной, а Гельмгольц специализировался в области физиологии. Судьбы работ этих



Установка для определения соотношения между совершенной механической работой и выделившимся количеством теплоты в опытах Дж. Джоуля. Грузы, привязанные к концам нити, навитой на барабан, при падении приводят его во вращение. На ось барабана насажен стержень с лопатками, который вращается в калориметре с водой и таким образом нагревает воду. Справа внизу показан разрез калориметра по вертикали.

ученых тоже оказались сходными: и ту, и другую издатель ведущего немецкого физического журнала отказался публиковать, считая их слишком «теоретическими».

Потенциальная энергия впервые появилась в работе Гельмгольца под именем «силы напряжения». Однако автор не дал этому понятию наглядной физической интерпретации, и поэтому вокруг него разгорелись споры. Суть проблемы очень ясно сформулировал А. Пуанкаре: «...чтобы материализовать энергию, нужно ее локализовать; в отношении кинетической энергии — это просто (она приписывается движущемуся телу), но не так дело обстоит с энергией потенциальной. Где локализовать потенциальную энергию, вызванную притяжением двух небесных тел? В одном из двух? В обоих? В промежуточном пространстве?».

Предлагались различные решения этой проблемы. Г. Герц, например, считал необходимым ... вообще отказаться от понятия «потенциальной энергии» и пытался свести этот вид энергии к кинетической энергии скрытых движений частиц тела. Однако эта попытка оказалась неудачной. Позднее было выяснено, что потенциальная энергия является мерой взаимодействия и что глубокая и полная интерпретация этого понятия невозможна без привлечения представления о поле. (Этот вопрос подробно обсуждается в следующей заметке на примере электростатического взаимодействия заряженных тел. — *Примеч. ред.*)

Так постепенное развитие понятий механики привело ученых к идеям, далеко выходящим за рамки этого раздела физики. Взаимное обогащение различных областей физической науки — характерная черта ее истории.

Энергия электрического поля

Как известно («Физика 9», § 55), чтобы зарядить конденсатор, необходимо совершить некоторую работу. Эта работа требуется для преодоления сил электростатического притяжения, возникающих при разделении положительных и отрицательных за-

рядов. За счет совершенной работы в конденсаторе запасается потенциальная электростатическая энергия

$$W = \frac{1}{2}UQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2, \quad (1)$$

где U — разность потенциалов между обкладками, C — емкость конденсатора, Q — заряд на его обкладках.

Ясно, что для того чтобы зарядить любое уединенное тело, то есть создать в нем избыток зарядов одного знака, также следует совершить определенную работу. В этом случае она совершается против сил электростатического отталкивания, которые действуют между одноименными зарядами, накапливающимися на теле. Вычислим эту работу.

Рассмотрим уединенный проводник. Пусть нам уже удалось сосредоточить на нем заряд q . Потенциал создаваемого этим зарядом электрического поля на бесконечности условимся считать равным нулю, а потенциал самого проводника обозначим через $\varphi(q)$. Теперь будем переносить на проводник из бесконечности дополнительный малый заряд Δq . Для этого потребуется совершить работу

$$\Delta A = \varphi(q)\Delta q.$$

Понятно, что потенциал электростатического поля всегда пропорционален величине создающего это поле заряда. В данном случае потенциал проводника пропорционален заряду на нем:

$$\varphi(q) \sim q, \text{ или } \varphi(q) = \frac{1}{C}q.$$

Входящая в коэффициент пропорциональности величина C называется емкостью уединенного проводника. Она зависит от формы, размеров проводника и диэлектрической проницаемости окружающей среды.

Построим график линейной зависимости φ от q (рис. 1). Работа ΔA , совершаемая при перенесении заряда Δq из бесконечности на проводник, на этом графике представляется площадью заштрихованного столбика. Полная же работа A по зарядке уединенного проводника до заряда Q определяется суммой площадей всех аналогичных столбиков, то есть площадью фигуры под графиком зависимости φ от q . В данном случае — площадью треугольника. Поэтому работа по зарядке уединенного провод-

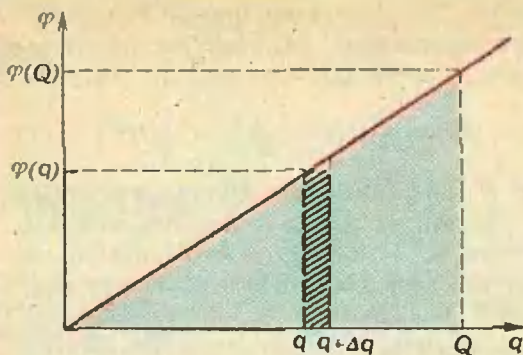


Рис. 1.

ника, равная запасаемой им потенциальной электростатической энергии, определяется формулой

$$A = W = \frac{1}{2} \varphi(Q) Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\varphi(Q))^2. \quad (2)$$

Формула (2) по виду совпадает с формулой (1), однако входящие в нее величины имеют несколько иной смысл: $\varphi(Q)$ — это потенциал уединенного проводника, а не разность потенциалов (U) между обкладками конденсатора, C — емкость проводника, а не конденсатора.

Но где именно запасается энергия? На этот вопрос существуют два равноправных ответа. Первый основывается на том, что запасенная энергия — это энергия взаимодействия зарядов, находящихся на проводнике. Согласно второй точке зрения носителем запасенной энергии является электрическое поле, так что энергия распределена в окружающем проводник пространстве. В случае плоского конденсатора созданное им электрическое поле однородно, и сосредоточено в области между пластинами. Тогда легко показать («Физика 9», § 55), что плотность энергии — энергия, приходящаяся на единицу объема, — определяется выражением

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (3)$$

где E — напряженность поля, ε — диэлектрическая проницаемость среды внутри конденсатора.

Оказывается, этой же формулой можно воспользоваться для подсчета полной энергии электрического поля и в общем случае, когда поле неоднородно. Так, например, в пространстве вокруг заряженного тела напряженность электрического поля уменьшается по мере удаления от

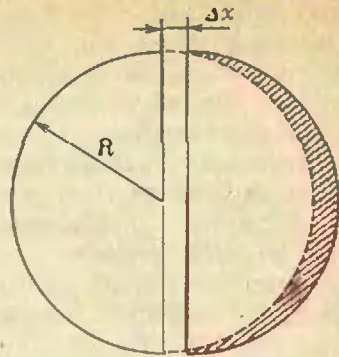


Рис. 2.

тела. Тем не менее в любом месте пространства мы всегда можем выбрать такой небольшой объемчик ΔV , что напряженность поля в нем практически не изменяется. Тогда, согласно формуле (3), мы можем вычислить соответствующую плотность энергии и найдем, что в выбранном объемчике заключена энергия

$$\Delta W = w \Delta V = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} \Delta V.$$

Если теперь весь объем, где имеется электрическое поле, разбить на маленькие объемчики, подсчитать указанным способом энергию каждого из них, а затем все просуммировать, то мы получим полную энергию электрического поля. Как это ни удивительно, но для полной энергии получится уже известное выражение (2).

Красивым примером, показывающим плодотворность такого подхода вычисления энергии, может служить задача о нахождении силы отталкивания между двумя половинками заряженной проводящей сферы, находящейся в вакууме.

Прежде всего вспомним, что поле внутри проводящей сферы, как и внутри любого проводника («Физика 9», § 44), равно нулю. Вне сферы напряженность поля такая же, как у точечного заряда, равного заряду сферы и находящегося в ее центре:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

где Q — заряд сферы, r — расстояние от ее центра до рассматриваемой точки. У поверхности сферы радиусом R , таким образом, напряженность поля оказывается равной

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Давайте теперь мысленно разрежем сферу пополам и позволим искомой силе отталкивания F отдалить одну половинку от другой на малое расстояние Δx . Совершенная при этом работа

$$\Delta A = F \Delta x$$

равна уменьшению полной энергии электрического поля, запасенной, как мы знаем, во всем окружающем сферу пространстве. Дейст-

вительно, до нашего мысленного сдвига в области пространства (объемом ΔV), заштрихованной красным на рисунке 2, была запасена энергия

$$\Delta W = w \Delta V = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \Delta V = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} \Delta V.$$

После сдвига эта область оказалась уже внутри сферы, и напряженность поля в ней стала равной нулю. В образовавшийся зазор между полусферами поле практически не проникло, а в остальном пространстве оно почти не изменилось. Нетрудно убедиться в том, что объем заштрихованной области совпадает с объемом образовавшегося зазора, который легко вычисляется:

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x.$$

Таким образом, согласно закону сохранения энергии, можно записать $\Delta A = \Delta W$, или

$$F \Delta x = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} \pi R^2 \Delta x.$$

Отсюда сила отталкивания между двумя полусферами оказывается равной

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

Итак, можно считать, что энергия заряженного тела — это энергия взаимодействия его зарядов, а можно приписывать ее создаваемому телом в пространстве электрическому полю. Какой из этих точек зрения отдать предпочтение — в рамках электростатики это «дело вкуса». Однако при изучении переменных полей единственно возможным оказывается именно второй подход, связывающий энергию с электрическим полем.

Капельная модель ядра

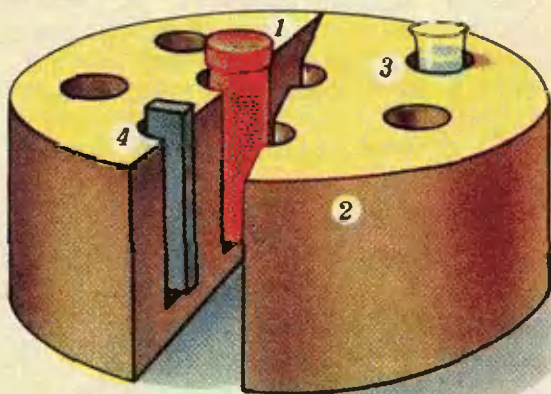
Однажды великого английского физика Э. Резерфорда, основоположника ядерной физики, спросили, какой практический интерес могут иметь его открытия в области радиоактивности. Ученый ответил, что ровно никакого. В то время действительно невозможно было даже вообразить способ использования внутриядерных процессов и явлений. Сегодня же каждый представляет, какое значение в жизни человечества имеет атомная энергетика.

Важнейшую роль в открытии возможностей использования атомной энергии сыграла способность некоторых тяжелых ядер к делению («Физика 10», § 110). В 1938 году было обнаружено, что при бомбардировке ядер урана нейтронами образуются ядра-осколки более легких элемен-

тов. Этот процесс всегда сопровождается испусканием нескольких новых нейтронов.

Почему же ядра могут делиться? Первую теорию деления ядер создали в 1939 году физики-теоретики датчанин Н. Бор и американец Дж. Уилер и независимо от них советский физик-теоретик Я. И. Френкель. Данное ими объяснение основывалось на капельной модели атомного ядра, представляющее собой сгусток нуклонов, ведет себя подобно капле электрически заряженной жидкости. Разберемся в этом подробнее и прежде всего выясним, от чего и как зависит энергия связи ядра — энергия, которую необходимо затратить для разделения ядра на составляющие его нуклоны.

Ядерные силы, притягивающие нуклоны друг к другу, проявляются лишь на очень малых расстояниях (они обладают ограниченным радиусом действия, порядка 10^{-15} м), поэтому каждый нуклон взаимодействует практически только со своими ближайшими соседями, а не со всеми имеющимися в ядре нуклонами. Так же обстоят дела и в обычной капле — поскольку силы межмолекулярного притяжения действуют на расстояниях, не превышающих расстояния между молекулами, приходится считать лишь с взаимодействием ближайших соседей. Число соседей у каждого нуклона можно считать постоянным. Таким образом, вклад в



Модель экспериментальной установки, с помощью которой было осуществлено открытие деления тяжелых ядер: 1 — источник нейтронов; 2 — парафиновый блок для замедления нейтронов; 3 — облучаемый препарат (раствор соли урана); 4 — металлическая мишень.

энергию связи, обусловленный ядерными силами, оказывается пропорциональным числу нуклонов в ядре, то есть массовому числу A : $E_{\text{я}} \sim A$.

Однако у нуклонов на поверхности «ядерной капли» соседей меньше, чем внутри ядра, поэтому в энергии связи они дают несколько меньший вклад, чем мы им уже приписали. Это можно учесть, вычтя из $E_{\text{я}}$ поверхностную энергию $E_{\text{пов}}$, пропорциональную числу нуклонов на поверхности ядра, а следовательно, и площади его поверхности: $E_{\text{пов}} \sim S_{\text{пов}} \sim R_{\text{я}}^2 \sim A^{2/3}$ (здесь мы воспользовались тем, что, как показывает опыт, радиусы ядер довольно точно пропорциональны кубическому корню из массового числа). Как видим, и тут имеется полная аналогия с каплей обычной жидкости — молекулы, находящиеся на поверхности, стремятся уйти вглубь и создают силы поверхностного натяжения, с которыми связана поверхностная энергия жидкости.

Чтобы получить окончательное выражение для энергии связи ядра, нам осталось учесть, что часть нуклонов (протоны) заряжены. А это означает, что, помимо ядерного притяжения к ближайшим соседям, они испытывают еще действие сил обычного электростатического отталкивания, подчиняющегося закону Кулона. Взаимное отталкивание протонов стремится разорвать ядро и, таким образом, уменьшает его энергию связи. В отличие от ядерных, кулоновские силы дальнедействующие — каждый протон взаимодействует со всеми протонами этого ядра. Энергия взаимодействия двух протонов $\sim e^2/R_{\text{я}}$. Если в ядре имеется Z протонов, то каждый из них взаимодействует с $(Z - 1)$ остальными и число взаимо-

действующих пар равно $1/2 Z(Z - 1)$ (для больших Z можно считать, что это число пропорционально Z^2). Таким образом, находим, что энергия электростатического отталкивания протонов в ядре $E_{\text{эл}} \sim Z^2 \cdot e^2/R_{\text{я}} \sim Z^2 e^2/A^{1/3}$.

Итак, окончательно для энергии связи ядра получаем

$$E_{\text{св}} = E_{\text{я}} - E_{\text{пов}} - E_{\text{эл}} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z^2/A^{1/3},$$

где α , β и γ — некоторые постоянные. Эта формула неплохо описывает экспериментальную кривую зависимости удельной энергии связи от массового числа («Физика 10», § 108). Сначала с ростом A энергия связи растет. Где-то в средней части таблицы Менделеева $E_{\text{св}}$ достигает максимума, а затем начинает уменьшаться.

Рассмотрим теперь процесс деления ядра. Пусть ядерная «капля», поглотив попавший в нее нейтрон, начинает колебаться и в какой-то момент вытягивается. Минимальную поверхность при заданном объеме имеет сферическая капля. У вытянутой капли поверхностная энергия увеличивается, а энергия связи ядра соответственно уменьшается. С другой стороны, при растяжении ядра возрастает среднее расстояние между нуклонами, и энергия их электростатического отталкивания уменьшается, в результате чего энергия связи должна увеличиться. Если в этой борьбе победит электростатическое взаимодействие, ядро разорвется; если же поверхностное — ядро вернется в исходное состояние.

Из полученного выражения для $E_{\text{св}}$ понятно, что судьба ядра во многом зависит от числа протонов (Z) и общего числа нуклонов (A). С ростом порядкового номера элемента энергия электростатического отталкивания возрастает быстрее поверхностной энергии, поэтому делиться могут только тяжелые ядра.

Как уже говорилось, в процессе деления ядра всегда испускается еще несколько нейтронов, которые могут вызвать деление других ядер (для урана обычно 2—3). Именно эти нейтроны и позволяют, опровергнув пессимистическое предсказание Резерфорда, реализовать на практике цепную ядерную реакцию деления, которая сопровождается выделением огромного количества энергии.

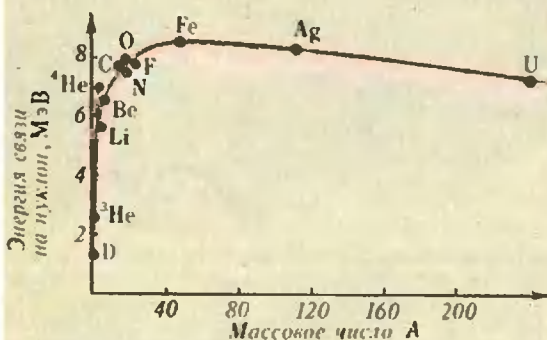


График зависимости удельной энергии связи (в расчете на нуклон) от массового числа.



Задачи

1. У Пети три брата. Первый старше его на три года, второй моложе его на три года, третий моложе Пети втрое. Зато отец втрое старше Пети. Всем вместе им 95 лет. Сколько лет каждому?

2. Решите числовой ребус

$$USA + USSR = PEACE.$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Наша речка небольшая. Обычно я перехожу ее, погружаясь не более чем по пояс. Дно илистое, и ноги проваливаются в ил по щиколотку. Однажды после сильных дождей вода в реке сильно поднялась. Теперь уже, переходя реку, я опускался в воду по шею. Интересно, что при этом ноги перестали вязнуть в иле. Почему?

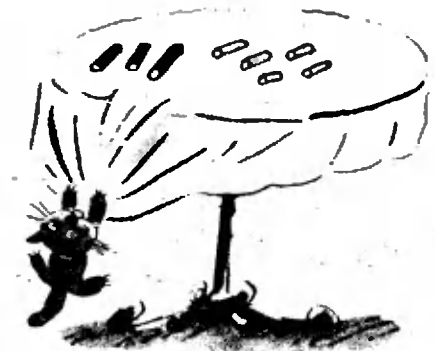
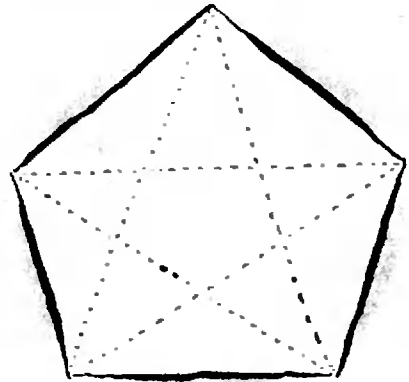
4. Пятиугольник разрезан на 11 частей (см. рисунок). Расставьте в них числа 1, 2, ..., 11 так, чтобы суммы чисел были равны во всех треугольниках, все вершины которых являются вершинами пятиугольника.

5. На столе лежат три красные палочки разной длины, причем сумма длин равняется 30 см, и пять синих палочек, сумма длин которых тоже равняется 30 см. Можно ли распилить те и другие палочки так, чтобы их потом можно было расположить парами, и в каждой паре длины палочек были одинаковы, а цвета разные?

Эти задачи нам предложили В. Д. Вьюн, ученик 9 кл. 149 школы г. Харькова Борис Кругликов, А. П. Савин, В. П. Чичин, В. В. Произволов.

+ USA
+ USSR

PEACE





Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда

*Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН*

Жарко, тепло, холодно, мороз... Так мы в быту характеризуем степень нагретости разных тел. Мерой нагретости является температура: чем выше температура — тем более нагрето тело.

Мы легко на ощупь отличаем горячее от холодного, но наука начинается с количественных измерений. Сегодня и дошкольник знает — чтобы измерить температуру, надо взять градусник, то есть термометр. Именно с изобретения термометра началось развитие науки о теплоте.

В большинстве термометров используется свойство тел расширяться при нагревании (и сжиматься при охлаждении). Первый термометр, который был построен Галилеем в самом на-

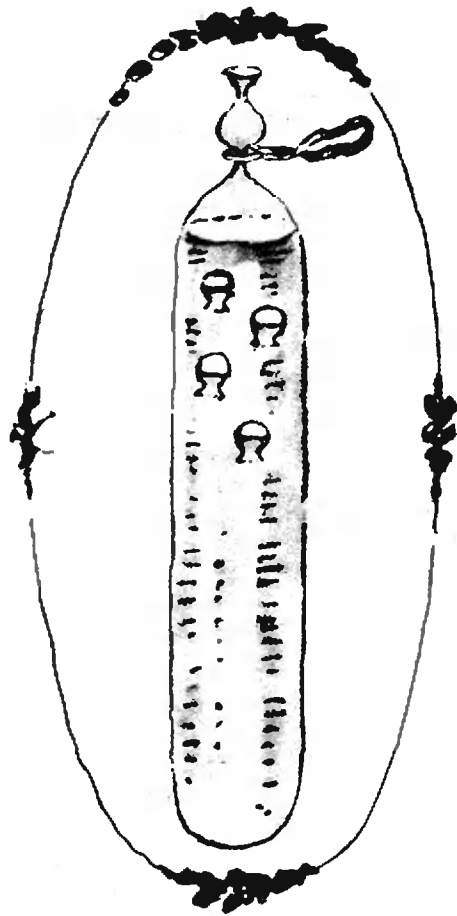
чале XVII века, работал на воде. Понятно, что с его помощью можно было измерять температуры не ниже температуры замерзания воды и не выше температуры ее кипения. Со временем наибольшее распространение получил ртутный термометр. В сильные морозы он, однако, перестает работать — при температуре $-38,8^{\circ}\text{C}$ ртуть замерзает. На помощь здесь приходит спиртовой термометр (температура замерзания спирта намного ниже, чем у ртути, и равна -97°C), который также сейчас находит широкое применение.

Заслуга изобретения спиртового термометра принадлежит герцогу Фердинанду II, правившему в середине XVII века во Флоренции. Наряду с государственными делами герцог много времени уделял занятиям естественными науками. В свое время он был учеником Галилея и внес заметный вклад в развитие методов измерения температуры. До того как термометр прочно вошел в обиход, был распространен термоскоп. Этот прибор для контроля температуры позволял лишь судить о том, выше или ниже температура некоторой определенной величины. Но измерять термоскопом температуру было не-

возможно. В изготовлении различных термоскопов Фердинанд достиг большого мастерства. Один из своих термоскопов Фердинанд прислал немецкому иезуиту Кирхеру, занимавшемуся «по совместительству» научными исследованиями. Прибор состоял из открытой сверху стеклянной трубки, почти полностью заполненной водой (см. рисунок). В воде находилось несколько крошечных грушевидных сосудиков с оттянутыми вниз горлышками. В каждом сосудике был заключен пузырек воздуха, размер которого был подобран таким образом, чтобы при определенной температуре сосудики плавали в воде внутри трубки. При более высокой температуре воздух в сосудиках расширялся, частично вытесняя воду; в результате этого увеличивалась выталкивающая сила, и сосудики поднимались на поверхность воды. По описанию, сделанному Фердинандом, можно судить, что температура, при которой сосудики «висели» внутри трубки, была около 15°C . Когда же температура окружающего воздуха опускалась ниже 15°C , воздух внутри сосудиков сжимался, количество воды в них увеличивалось, и они опускались на дно.

Одновременно с этим прибором и подробным описанием его работы Фердинанд прислал Кирхеру и другой термоскоп. Он был очень похож на первый и отличался лишь тем, что был полностью заполнен водой и запаян. В этом приборе, однако, наоборот, сосудики опускались при нагревании, а поднимались при охлаждении. Фердинанд предоставил Кирхеру самому решить загадку второго термоскопа. Нам неизвестно, справился ли с этой задачей Кирхер. Но мы надеемся, что вы, читатель, сделаете это без особого труда. (А проверить правильность своего ответа вы можете, посмотрев на с. 58).

Фердинанд построил и термометры самых разнообразных типов и конструкций. Любопытно, что он многое делал для «внедрения» научных открытий в «производство». Один из проектов Фердинанда заключался в широкомасштабном разведении кур. Он построил один из первых инкубаторов, где использовал свой термометр для контроля температуры при искусственном насиживании яиц.



Однако уже тогда внедрение достижений науки было делом непростым: из 150 яиц Фердинанд получил лишь трех цыплят. Почему так произошло? Может быть, из-за недостаточной расторопности работника, несерьезно относившегося к показаниям термометра и больше доверявшего своим ощущениям, а может быть, из-за слабых знаний Фердинанда по биологии. Сейчас остается только гадать, отчего закончился крахом этот эксперимент.

С большим успехом Фердинанд использовал термометр для наблюдений за погодой, он проводил важные метеорологические измерения, обобщил материалы наблюдений за температурой в глубоких колодцах и подземельях в различные времена года. Оказалось, что на глубине смена времен года происходит несколько позже, чем на поверхности — нужно время, чтобы земля успела прогреться или, наоборот, охладиться.

Закончим мы наш маленький рассказ о термометрах и термоскопах вопросом к читателю: подумайте, почему водяной термометр неудобен для измерения температур, близких к температуре замерзания воды?

задачник Кванта

Задачи

М981—М985; Ф993—Ф997

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5-86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М981, М982» или «Ф993». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решения). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (в конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя обязательно пишите печатными буквами.

М981. Докажите, что число $11\dots 1$ (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8, б) 28 различных делителей.

Л. Д. Курляндчик

М982. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2 , BCB_1C_2 , CAA_1C_2 . Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , восстановленные в их серединах, пересекаются в одной точке.

Н. Азамов (ученик 8 класса)

М983. В турнире с участием 16 теннисистов каждые двое играют одну партию.

а) Приведите пример распределения результатов партий, при котором любых 10 участников можно расставить по кругу так, чтобы каждый выиграл у своего левого соседа.

б) Докажите, что если условие пункта а) выполнено, то и любых 11 участников можно расставить по кругу таким образом.

К. П. Кохась

М984. Через произвольную точку K квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая его противоположные стороны AB и CD в точках P и Q . Докажите, что отличная от K точка пересечения окружностей, проходящих через точки K , B , P и K , D , Q , лежит на диагонали BD (рис. 1).

В. Н. Дубровский

М985. Углом между двумя прямыми, пересекающимися в точке Q , называется угол между их лучами с вершиной O , не превосходящий 90° . Сколькими способами через точку O в пространстве можно провести три прямые l_1, l_2, l_3 так, чтобы углы между l_2 и l_3 , l_3 и l_1 , l_1 и l_2 соответственно равнялись данному числам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$? (Две тройки прямых l_1, l_2, l_3 и l'_1, l'_2, l'_3 считаются одинаковыми, если они «конгруэнтны», то есть если существует поворот или симметрия относительно плоскости, переводящие l_i в l'_i для всех $i=1, 2, 3$.)

Предостережение: ответ зависит от величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; например, для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30^\circ$ он не такой, как для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70^\circ$.

А. Б. Гончаров

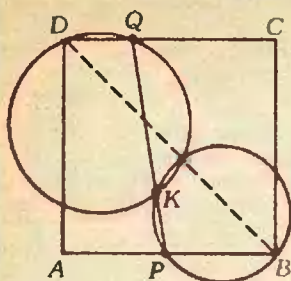


Рис. 1.

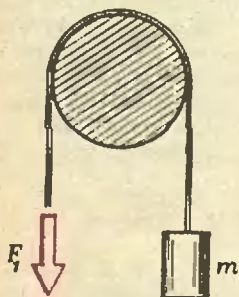


Рис. 2.

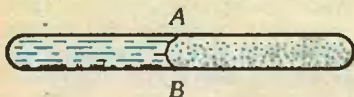


Рис. 3.

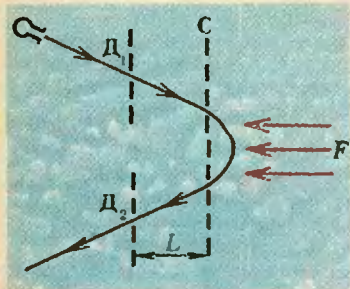


Рис. 4.

Ф993. Через неподвижное, горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка. Чтобы удерживать груз массы $m=6$ кг, подвешенный на этой веревке, необходимо тянуть второй конец веревки с минимальной силой $F_1=40$ Н (рис. 2). С какой минимальной силой F_2 надо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься?

А. И. Буздин

Ф994. Спутник исследует планету, плотность которой ρ , двигаясь по круговой орбите с периодом обращения T и фотографируя ее поверхность. Какая часть площади планеты останется неисследованной?

В. В. Дорин

Ф995. В запаянном капилляре находится жидкость плотности ρ . При нагревании капилляра на малое ΔT оказалось, что граница AB между жидкостью и ее паром (рис. 3) не сдвигается. При этом давление пара возросло на Δp . Как изменилась плотность жидкости?

Л. Г. Маркович

Ф996. В пролетном масс-спектрометре источник испускает сгусток заряженных частиц, которые сначала летят свободно (рис. 4) и пролетают через первый датчик (D_1), находящийся на расстоянии L от сетки (C). За сеткой по нормали к ней на частицы действует электрическая сила F . Частицы поворачиваются, вылетают через сетку назад и пролетают через второй датчик (D_2), находящийся на том же расстоянии L от сетки. Меняя режим работы источника, измеряют время между срабатываниями датчиков и находят наименьшее время пролета t . Какова масса частиц? (Начальная скорость зависит от напряжения источника, но точное значение ее неизвестно.) Как можно найти массы частиц, если источник испускает одновременно несколько сортов частиц с разными массами?

И. И. Воробьев

Ф997. Известно, что светящийся след падающего метеорита по мере приближения к Земле становится ярче. Однако в верхних слоях атмосферы он сохраняется значительно дольше, чем у Земли. Почему?

А. С. Бутов

Problems

M981 — M985; P993 — P997

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indi-

M981. Prove that the number $11\dots 1$ (1986 ones) has at least a) 8, b) 28 different divisors.

L. D. Kurlyandchik

M982. The squares ABB_1A_2 , BCB_1C_2 , CAA_1C_2 are constructed on the exterior of sides AB , BC , CA of triangle ABC . Prove that the perpendiculars at the midpoints of the segments A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 intersect in one point.

N. A. Azamov (8th form pupil)

M983. Sixteen tennis players play in a round robin tournament (each pair playing once).

a) Give an example of the results of such a tournament where

cate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian and English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

any ten players can be placed in a circle so that each of them has defeated his neighbour to the left.

b) Prove that if the conditions of a) are met, then any eleven players can be placed in a circle in the same way.

K. P. Kokhas

M984. A line passing through an arbitrary point K of the square $ABCD$ intersects its opposite sides AB and CD at the points P and Q . Prove that the intersection point different from K of the circles passing through the points K, B, P and K, D, Q lies on the diagonal BD (see figure Puc. 1).

V. N. Dubrovski

M985. By the angle between two lines intersecting at point O we mean the angle between rays with origin O on these lines if this angle is no greater than 90° . How many different ways are there to construct three lines l_1, l_2, l_3 through the point O so that the angles between lines l_2 and l_3, l_3 and l_1, l_1 and l_2 are respectively equal to $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$? (Two line triples l_1, l_2, l_3 and l'_1, l'_2, l'_3 are "different" if they are not congruent, i. e. there exists no rotation or symmetry in a plane sending l_i into l'_i for all $i=1, 2, 3$.)

Warning: the answer depends on the magnitude of $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e. g. for $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30^\circ$ it is not the same as for $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70^\circ$.

A. B. Goncharov

P993. A rope is thrown over a horizontally fixed log. In order to hold in place a weight of mass $m=6\text{kg}$ hanging on this rope, a minimal force of $F_1=40\text{ N}$ must be exerted (see figure Puc. 2). What minimal force F_2 must be exerted to start the weight moving up?

A. I. Buzdin

P994. A satellite rotates with period T along a circular orbit about a planet of density ρ and photographs its surface. What part of the planet's surface will remain unphotographed?

V. V. Dorin

P995. A sealed capillary contains a liquid of density ρ . When the capillary's temperature was increased by the (small) value ΔT , it turned out that the boundary AB between the liquid and its vapor did not move (see figure Puc. 3). The pressure of vapor increased by Δp . How did the liquid's density change?

L. G. Markovich

P996. In a fly-through mass-spectrometer the source emits a beam of charged particles which fly freely (see figure Puc. 4), passing through the first counter (D_1) located at the distance L from the grid (C). Behind the grid, the electric force F acts perpendicularly to the grid. The particles make a U-turn, fly back through the grid, passing through the second counter (D_2) located at the same distance L from the grid. Changing the working conditions of the source, it is possible to measure the minimal flight time τ between the counters. What is the mass of the particles? (The initial velocity depends on the voltage on the source, but its exact value is unknown.) How can one find the masses of the particles if the source emits several types of particles of different masses?

I. I. Vorobiev

P997. It is known that the luminous trace of a falling meteorite becomes brighter as it approaches the earth. However, it remains visible in the upper atmospheric layers longer than near the earth's surface. Why?

A. S. Butov

Решения задач

M961 — M965; Ф973 — Ф977

M961. На стороне AB квадрата $ABCD$ взята точка E , а на стороне CD — точка F , причем $AE:EB=1:2$, $CF=FD$. Будут ли голубой и розовый треугольники (рис. 1) подобны?

Ответ: да. Обозначим точки пересечения диагонали AC с отрезками ED и BF через M и N . В треугольниках AEM и CFN углы EAM и FCN равны по 45° , $\text{tg} \angle AEM=3$, $\text{tg} \angle CFN=2$ и, поскольку $\angle AME=\angle CNF=180^\circ-45^\circ-\angle AEM$, $\text{tg} \angle AME=-\text{tg}(45^\circ+$

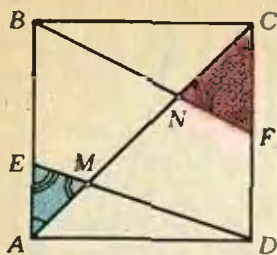


Рис. 1.

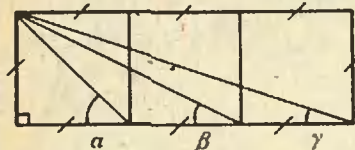


Рис. 2. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

M962. Докажите, что ни для какого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами не могут найтись такие различные целые числа x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$), для которых выполнялись бы равенства $P(x_1) = x_2, P(x_2) = x_3, \dots, P(x_{n-1}) = x_n, P(x_n) = x_1$.

$+\angle AEM) = \frac{1+3}{1-1 \cdot 3} = 2$, следовательно, $\angle CFN = \angle AME$, и треугольники подобны по двум углам.

Приведем еще одно, чисто геометрическое решение. Очевидно, что $AM:MC = AE:CD = 1:3$, $AB:AC = \sqrt{2}/2$, следовательно,

$$AE:AM = \left(\frac{1}{3}AB\right) : \left(\frac{1}{4}AC\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Аналогично, $CN:NA = CF:AB = 1:2$ и

$$CN:CF = \left(\frac{1}{3}AC\right) : \left(\frac{1}{2}CD\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

то есть $AE:AM = CN:CF$; отсюда вытекает подобие треугольников.

Эта задача построена на соотношении $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi/2$; оно же используется и в задаче, приведенной на рисунке 2, — попробуйте решить ее чисто геометрически!

А. П. Савин, В. Н. Дубровский

◆ Покажем, что если целые числа x_1, \dots, x_n удовлетворяют равенствам из условия задачи, то среди них найдутся одинаковые.

Мы используем такую лемму: если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, b и c — различные целые числа, то $P(b) - P(c)$ делится на $b - c$. При этом будет выполняться неравенство $|b - c| < |P(b) - P(c)|$; только это следствие и понадобится для решения задачи.

Поскольку $P(x_1) = x_2, P(x_2) = x_3$, по лемме $|x_1 - x_2| \leq |x_2 - x_3|$; точно так же, пройдя по всему циклу, получим

$$|x_1 - x_2| \leq |x_2 - x_3| \leq |x_3 - x_4| \leq \dots \leq |x_n x_1| \leq |x_1 - x_2|,$$

а значит, $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_n - x_1|$.

Если $n \geq 3$, отсюда следует, что среди чисел x_1, x_2, \dots, x_n найдутся равные: можно считать, что x_1 — наименьшее из этих чисел; тогда

$$x_2 - x_1 = |x_1 - x_2| = |x_n - x_1| = x_n - x_1,$$

то есть $x_n = x_2$.

Доказательство леммы. Из равенства, приведенного на полях, ясно, что число $b^k - c^k$ при любом натуральном k делится на $b - c$. Пусть $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$; тогда число $P(b) - P(c) = a_1(b - c) + a_2(b^2 - c^2) + \dots + a_n(b^n - c^n)$ также делится на $b - c$.

Д. Роду

◆ Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Пусть отрезки AB и CD параллельны, а отрезки AC и BD пересекаются в точке P (рис. 1). Тогда множество точек X , лежащих внутри углов APB и CPD , таких, что треугольники XAC и XBD равновелики, есть прямая, соединяющая середины отрезков AB и CD .

Для доказательства проведем через точку X прямую, параллельную AB и CD ; пусть она пересекает

(Окончание см. на с. 34)

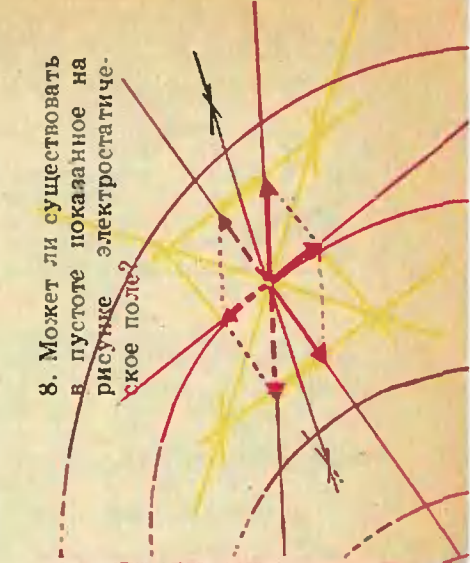
M963. Три пары противоположных сторон шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие их середины, пересекаются в одной точке.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

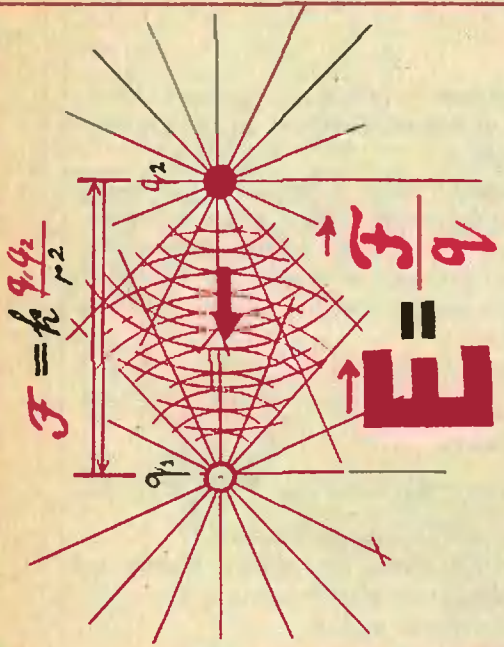
6. Заряд $(-q)$ находится в центре полой металлической сферы, которая несет заряд $(+2q)$. Изобразите с помощью силовых линий результирующее электрическое поле.

7. На расстоянии r от проводящей незаряженной плоскости находится точечный заряд $(+q)$. С какой силой будут взаимодействовать заряд и плоскость?

8. Может ли существовать в пустоте показанное на рисунке электростатическое поле?



калейдоскоп



Фарадей своим мысленным взором видел силовые линии, пронизывающие все пространство... Фарадей искал сущность реальных явлений, протекающих в среде. Дж. К. Максвелл

калейдоскоп

Вопросы и задачи

1. Приведите пример, когда при сближении двух разноименно заряженных тел сила притяжения между ними уменьшается до нуля.
2. Какова напряженность электрического поля в точке, одинаково удаленной от зарядов, образующих электрический диполь?
3. Покажите, не производя вычислений, что напряженность поля электрического диполя тем меньше, чем меньше расстояние между зарядами, образующими диполь.



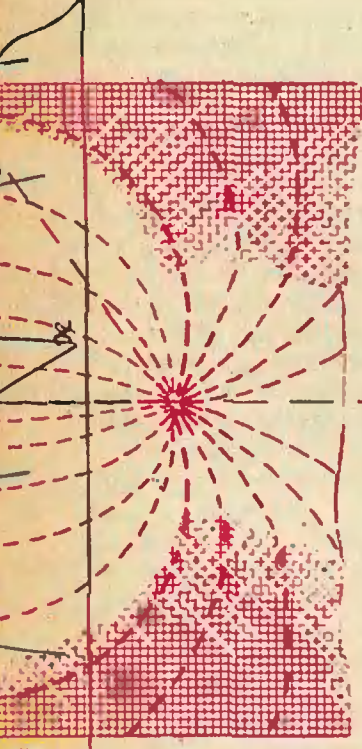
4. Как будет вести себя положительно заряженный шар в каждом из электрических полей, изображенных на рисунке? Как будет вести себя в этих же полях незаряженный шар?
5. Заряженный проводник, взятый в виде листа, свернули в цилиндр. Изменилась ли напряженность электрического поля у поверхности проводника?

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

С помощью резиновой трубки, надетой на водопроводный кран, устройте фонтан так, чтобы струя била под углом к вертикали. Поднесите к испускающей части струи наэлектризованную палочку и добейтесь того, чтобы рассыпавшаяся на снопы брызг струя вновь слилась. Объясните это явление.



Микрофонтан



А так ли хорошо знакомо вам

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

?

Понятие поля впервые было выдвинуто Майклом Фарадеем. Даже если бы Фарадей поларил миру одну лишь эту идею, его имя стало бы бессмертным. Однако исследования Фарадея сделали его понятием охватителем современного электромагнетизма.

В дальнейшем эта идея была развита выдающимся преимником Фарадея Джеймсом Клерком Максвеллом. Полученные им уравнения дают точное математическое описание электрических и магнитных полей.

В середине XIX века «Калейдоскоп» утвердил существование с понятием «поле» призрака, взятых из электростатики

Любопытно, что...

...французского естествоиспытателя Шарля Дюфе (1698—1739), создавшего первую теорию электрических явлений, при введении опытов по электризации подвешивали на шелковых шнурках и электризовали настолько сильно, что при приближении руки другого человека из него выскакивали искры.

...обычно молнию рисуют бьющей сверху вниз. Между тем в действительности свечение начинается снизу и уже затем распространяется по вертикальному каналу. Молния, точнее — видимая ее фаза, оказывается, бьет снизу вверх!



Что читать об электрическом поле в «Кванте»

1. «Проводящая сфера в задачах по электростатике» — 1983, № 3;
2. «Из старых опытов» — 1983, № 5; 1985, № 7;
3. «Электрическое и магнитное поля» — 1984, № 3;
4. «Что такое электрический пробой» — 1984, № 8;
5. «Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики» — 1984, № 12;
6. «Электрический диполь и его электрический момент» — 1985, № 11;
7. «Как устроена пушота?» — 1986, № 3.

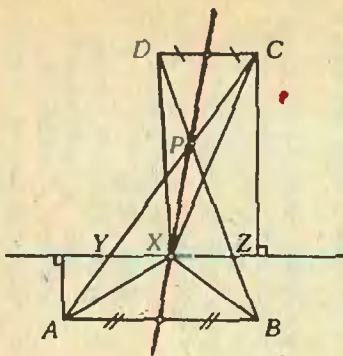


Рис. 1.

(Начало см. на с. 31)

AC и BD в точках Y и Z (см. рис. 1). Треугольники XAY и XCY имеют общее основание XY , а сумма их высот, опущенных на это основание, равна расстоянию h между прямыми AB и CD , поэтому

$$S_{XAC} = S_{XAY} + S_{XCY} = \frac{1}{2} XY \cdot h,$$

где буквой S , как обычно, обозначены площади. Точно так же

$$S_{XBD} = \frac{1}{2} XZ \cdot h.$$

Следовательно, треугольники XAC и XBD равновелики тогда и только тогда, когда X — середина отрезка YZ . Но множество середин всевозможных отрезков, параллельных AB , с концами на прямых AC и BD , очевидно, и есть прямая, соединяющая середины отрезков AB и CD (и, кстати, проходящая через P).

Отметим, что $S_{XAC} = S_{XBD}$ и для точек X на прямой, параллельной AB и проходящей через P ; для точек, не лежащих на указанных двух прямых, эти площади различны.

Перейдем к доказательству утверждения задачи. Пусть $A_1A_2\dots A_6$ — данный шестиугольник, M_1, M_2, \dots, M_6 — середины его сторон, P, Q, R — точки пересечения (больших) диагоналей A_1A_4 , A_2A_5 , A_3A_6 , O — точка пересечения «средних линий» M_1M_4 и M_2M_5 (обозначения см. на рисунке 2). По доказанному утверждению $S_{OA_1A_4} = S_{OA_4A_1}$ (так как O лежит на M_1M_4) и $S_{OA_2A_5} = S_{OA_5A_2}$ (так как O лежит на M_2M_5), следовательно, $S_{OA_1A_4} = S_{OA_4A_1}$. Кроме того, точка O принадлежит объединению углов A_1PA_2 и A_4PA_5 и в то же время объединению углов A_2QA_3 и A_5QA_6 , а пересечение этих двух пар углов — треугольник PQR (рис. 3), который содержится в одном из углов A_3RA_4 или A_6RA_1 . Снова пользуясь нашим утверждением, заключаем, что третья «средняя линия» M_3M_6 тоже проходит через O .

Упомянем еще три решения этой задачи. Первое из них аналогично приведенному нами и опирается на то, что множество точек X трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD , для которых треугольники A_1XD и BXC равновелики, есть отрезок, соединяющий середины оснований (ср. с доказанным выше вспомогательным утверждением). Кроме того, надо использовать еще один факт, интересный и сам по себе: если в шестиугольнике $A_1A_2\dots A_6$ противоположные стороны параллельны, то треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$ равновелики. Другое решение основано на специально подобранном параллельном проектировании. Именно, как можно показать, всегда существует такая проекция, при которой большие диагонали данного шестиугольника становятся равными (достаточно добиться того, чтобы две его «средние линии» стали перпендикулярны сторонам, которые они соединяют). Легко видеть, что в таком случае «средние линии» будут биссектрисами треугольника, ограниченного большими диагоналями, и, следовательно, пересекаются в одной точке. При этом шестиугольник оказывается вписанным в окружность с центром в точке пересечения «средних линий». Наконец, утверждение задачи можно вывести из общего условия пересечения в одной точке трех прямых, проведенных из вершин треугольника (в данном случае треугольника PQR — см. рис. 2), — так называемой теоремы Чезы (см., например, задачу 34 в статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского «Центр тяжести облегчает решение» в «Кванте» № 4 за 1984 г.).

В. Н. Дубровский

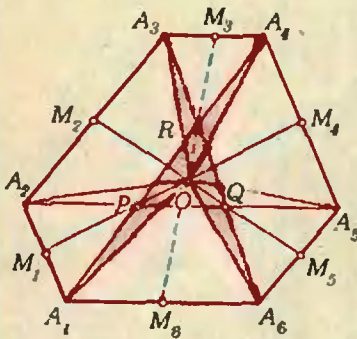


Рис. 2.

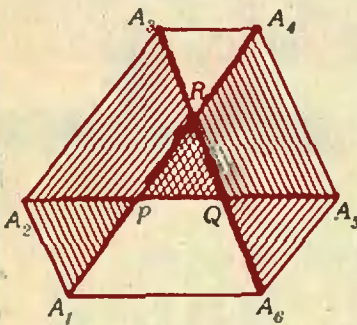


Рис. 3.

М964. Докажите, что в последовательности (a_n) различных натуральных чисел, удовлетворяющих условию $a_n < 100n$, найдется число, в десятичной записи которого
 а) встречается цифра 1;
 б) встречается 1986 единиц подряд.

а) Достаточно показать, что если в десятичной записи различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots не встречается цифра 1, то число a_n/n может быть сколь угодно большим (в частности, $a_n/n > 100$ при некотором n).

Заметим, что среди первых 9^k чисел нашей последовательности найдется такое a_n , запись которого состоит не менее чем из $k+1$ цифр, то есть $a_n \geq 10^k$. В самом деле, количество натуральных чисел, записываемых не более чем k цифрами, отличными от 1, равно $9^k - 1$ (в каждом из k разрядов такого числа стоит одна из 9 цифр 0, 2, 3, ..., 9, а число 0 исключается; мы подразумеваем, что числа, имеющие меньше k знаков, дополнены нулями в старших разрядах до k -значных). Поскольку $n \leq 9^k$, справедливо неравенство $a_n/n \geq (10/9)^k$, а его правая часть неограниченно растет с ростом k .

б) Совершенно так же, как в пункте а), доказывается, что если в записи чисел a_1, a_2, \dots в m -ичной системе счисления не входит некоторая « m -ичная цифра» c , то последовательность a_n/n неограничена (лишь при $c=0$ оценки нужно чуть-чуть изменить). Отсюда при $m=10^{1986}$, $c=\underbrace{11\dots1}_{1986 \text{ раз}}$

(в десятичной записи) вытекает утверждение б).
 А. А. Столин

М965. Дано шесть чисел a_1, a_2, \dots, a_6 . Чтобы подсчитать в «лоб» сумму их попарных произведений $a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_5a_6$, нужно затратить 15 умножений и 14 сложений. Покажите, как можно найти сразу: сумму этих чисел, сумму их произведений по два, по три, по четыре и по пять, затратив всего 15 сложений и 14 умножений.

Обозначим через S_n^1 сумму n первых чисел $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, через S_n^k — сумму их произведений по k штук. Тогда мы можем последовательно найти

$$S_2^1 = x_1 + x_2, S_2^2 = x_1 \cdot x_2,$$

затем

$$S_3^1 = S_2^1 + x_3, S_3^2 = S_2^2 + S_2^1 \cdot x_3, S_3^3 = S_2^2 \cdot x_3,$$

затем $S_n^k (1 \leq k \leq 4)$, $S_n^5 (1 \leq k \leq 5)$ и, наконец, $S_n^6 (1 \leq k \leq 5)$, пользуясь формулами

$$S_n^1 = S_{n-1}^1 + x_n, S_n^k = S_{n-1}^k + S_{n-1}^{k-1} \cdot x_n \\ (1 < k < n), S_n^n = S_{n-1}^{n-1} \cdot x_n.$$

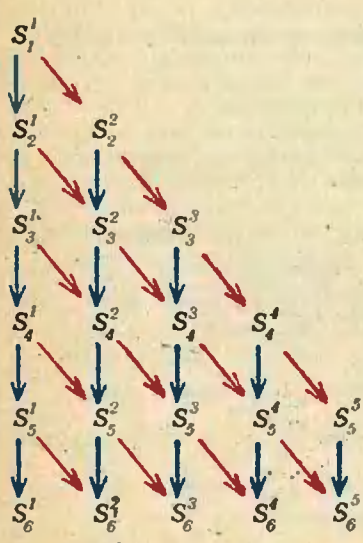
Для вычисления всех $S_n^k (1 \leq k \leq n)$ потребуется $n-1$ сложений и $n-1$ умножений. Таким образом, чтобы сделать это вплоть до $n=6$, нужно $1+2+3+4+5=15$ сложений и столько же умножений. Последнее умножение $S_6^6 = S_5^5 \cdot x_6$ можно сэкономить, поскольку не требуется считать произведение всех 6 чисел.

Эту последовательность операций иллюстрирует схема на полях (голубые стрелки — сложения, красные — умножения).

Коротко это решение можно объяснить так. Нам нужно найти коэффициенты многочлена $(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_6)$ при x, x^2, \dots, x^5 , а мы последовательно находим произведения $x+a_1$ на $x+a_2$, затем на $x+a_3, \dots$ на $x+a_6$.

Аналогично можно доказать, что все суммы произведений n чисел по $k (k=1, 2, \dots, n)$ можно найти за $1+2+\dots+(n-1) = n(n-1)/2$ сложений и столько же умножений. Интересно выяснить, можно ли обойтись для этого меньшим числом операций.

Н. Е. Васильев



Ф973. Тело начинает двигаться прямолинейно из точки А и через время T попадает в точку В а) с максимальной возможной скоростью; б) с минимально возможной скоростью; расстояние $|AB|$ равно l . Найти скорости тела в этих двух случаях, если скорость в точке А $v_0=0$ и ускорение тела $-a < a < a_0$.

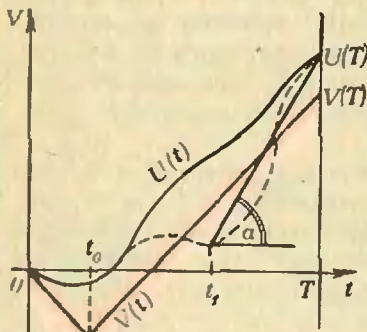


Рис. 1.

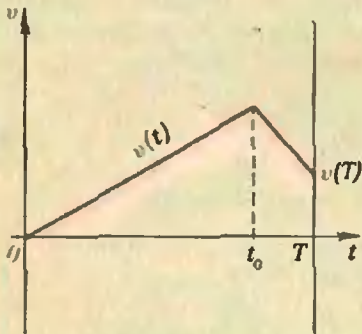


Рис. 2.

а) Чтобы прийти в точку В с максимальной скоростью, нужно двигаться следующим образом. До некоторого момента времени t_0 нужно двигаться с ускорением $-a_0$, затем до конца с ускорением a_0 . Точка t_0 находится из условия, что проходимый путь равен l :

$$l = -\frac{a_0 t_0^2}{2} - a_0 t_0 (t - t_0) + \frac{a_0 (T - t_0)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0^2 - 2Tt_0 + \frac{T^2}{2} = \frac{l}{a_0}, \quad t_0 = T - \sqrt{\frac{T^2}{2} + \frac{l}{a_0}}$$

(знак в решении квадратного уравнения выбирается из условия $t_0 < T$). Скорость в момент времени t обозначим через $V(t)$. График функции $V(t)$ показан на рисунке 1 красной линией. Пусть $U(t)$ — скорость при другом режиме движения, удовлетворяющем нашим условиям, таком, что $U(T) > V(T)$. Покажем, что тогда $U(t) \geq V(t)$ при любом t (см. рис. 1). Предположим, что $U(t_1) < V(t_1)$ при некотором t_1 (эта возможность показана на рис. 1 пунктиром). Если $t_1 > t_0$, то среднее ускорение на отрезке $t_1 \leq t \leq T$ больше a_0 (черная линия на рис. 1 наклонена круче, чем красная), а если $t_1 \leq t_0$, то среднее ускорение на отрезке $0 \leq t \leq t_1$ меньше $-a_0$. Итак, если $U(T) > V(T)$, то $U(t) \geq V(t)$ при любом t и тело, движущееся со скоростью $U(t)$, пройдет за время T отрезок, больший l . Значит, $V(T)$ — максимально возможная скорость. Находим ее:

$$V(T) = -a_0 t_0 + a_0 (T - t_0) = a_0 (T - 2t_0) =$$

$$= a_0 \left(-T + 2 \sqrt{\frac{T^2}{2} + \frac{l}{a_0}} \right) = \sqrt{2a_0^2 T^2 + 4a_0 l} - a_0 T.$$

б) Аналогично: чтобы прийти в точку В с минимальной скоростью, нужно до некоторого момента времени двигаться с ускорением a_0 , затем до конца с ускорением $-a_0$. Точка t_0 находится из условия, что проходимый путь равен l :

$$l = \frac{a_0 t_0^2}{2} + a_0 t_0 (T - t_0) - \frac{a_0 (T - t_0)^2}{2} \Rightarrow t_0 = T - \sqrt{\frac{T^2}{2} - \frac{l}{a_0}}$$

(график скорости $v(t)$ в зависимости от времени t показан на рис. 2). Скорость в момент времени T равна

$$a_0 t_0 - a_0 (T - t_0) = a_0 (2t_0 - T) =$$

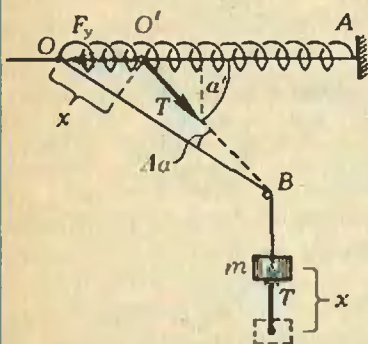
$$= a_0 \left(T - 2 \sqrt{\frac{T^2}{2} - \frac{l}{a_0}} \right) = a_0 T - \sqrt{2a_0^2 T^2 - 4a_0 l}.$$

Доказательство того, что эта скорость минимально возможная, аналогично предыдущему доказательству: если $u(t)$ — другой режим движения и $u(T) < v(T)$, то $u(t) \leq v(t)$ при любом t .

Примечание. В части а) может оказаться, что $t_0 < 0$: это будет при $l > \frac{a_0 T^2}{2}$; тогда решения нет. Тогда не имеет решения и часть б) (под корнем отрицательное выражение).

Д. А. Аюлян

Ф974. Определите период малых колебаний системы, изображенной на рисунке: масса груза m , упругость пружины k , $\angle AOB = \alpha$. Стержень и блок считать гладкими, пружину — невесомой. Пружина закреплена в точке A . Изменится ли период колебаний, если в точке O также закрепить груз m ?



Предположим, что груз сместился вниз на малое расстояние x . Посмотрим, как изменится при этом сила натяжения нити.

Поскольку пружина невесомая, в любой момент времени (см. рисунок)

$$F_y = T \cos \alpha, \text{ то есть } k(\Delta l + \Delta l') = T \cos \alpha',$$

где $\Delta l' = |OO'|$, $\alpha' = \angle AO'B$. Как видно из рисунка, $|OO'| = x/\cos \alpha$ и $\alpha' = \alpha + \Delta \alpha$, где $\Delta \alpha = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{l-x}$.

Так как $\cos(\alpha + \Delta \alpha) = \cos \alpha \cos \Delta \alpha - \sin \alpha \sin \Delta \alpha \approx \cos \alpha - \Delta \alpha \cdot \sin \alpha = \cos \alpha - \frac{x}{l-x} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$,

при малом смещении груза вниз

$$T = \frac{k\left(\Delta l + \frac{x}{\cos \alpha}\right)}{\cos \alpha - \frac{x}{l-x} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{k(\Delta l \cos \alpha + x)}{\cos^2 \alpha - \frac{x}{l-x} \sin^2 \alpha} \approx \frac{k(\Delta l \cos \alpha + x)}{\cos^2 \alpha}$$

(мы пренебрегли вторым слагаемым в знаменателе, так как $\frac{x}{l-x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$).

Теперь запишем уравнение движения груза:

$$ma = mg - T = mg - \frac{k \Delta l}{\cos \alpha} - \frac{kx}{\cos^2 \alpha} = - \frac{kx}{\cos^2 \alpha}$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с периодом

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m \cos^2 \alpha}{k}} = 2\pi \cos \alpha \sqrt{\frac{m}{k}}$$

В частности, при $\alpha = 0$ получаем знакомую формулу для периода колебаний груза на пружине.

Из решения понятно, что если в точке O закрепить груз, то период колебаний увеличится, так как в этом случае при том же значении α величина T будет меньше; ускорение груза, закрепленного в точке A , увеличится — период колебаний уменьшится.

Л. Г. Маркович

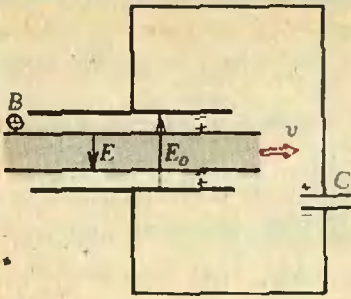
Ф975. Между пластинами плоского конденсатора площадью S , расстояние между которыми d , движется со скоростью \vec{v} плоскопараллельная протяженная проводящая пластина толщиной $d/2$. Вдоль пластины перпендикулярно \vec{v} действует постоянное магнитное поле с индукцией \vec{B} . Определите напряжение на конденсаторе емкостью C , соединенном с пластинами так, как показано на рисунке.

В объеме проводящей пластины имеется огромное количество свободных электронов. При движении пластины внутри конденсатора на свободные электроны действуют три силы: сила Лоренца со стороны магнитного поля $e\vec{v}\vec{B}$, направленная вниз; сила $e\vec{E}$ со стороны зарядов, находящихся на поверхностях движущейся пластины, направленная вверх; сила со стороны зарядов на пластинах конденсатора eE_0 , направленная вниз. Сумма всех этих трех сил внутри проводника должна быть равна нулю, то есть

$$e\vec{v}\vec{B} - e\vec{E} + eE_0 = 0. \quad (1)$$

При этом заряд на конденсаторе емкостью C должен быть равен заряду на пластинах площадью S :

$$Q = CU = \frac{\epsilon_0 S}{d} E_0 d = \epsilon_0 E_0 S. \quad (2)$$



Работа по перенесению единичного положительного заряда по замкнутому контуру в электрическом поле зарядов всегда равна нулю; значит,

$$E_0 d - Ed/2 + U = 0. \quad (3)$$

Чтобы найти значение $U = \frac{\epsilon_0 E_0 S}{C}$, найдем значение E_0 из системы уравнений (1)–(3). Будем считать для общности, что толщина пластины не $d/2$, а d' ; тогда

$$E_0 d - Ed' + \frac{\epsilon_0 E_0 S}{C} = 0, \quad (4)$$

$$\text{и из (1) и (4) находим } E_0 = \frac{v B d'}{\frac{\epsilon_0 S}{C} + d - d'}$$

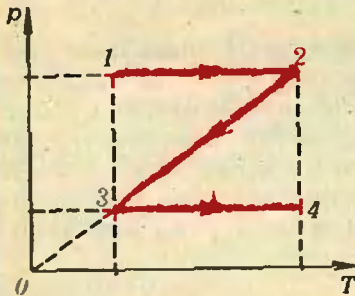
При $d' = 0$ $E_0 = 0$, а значит, и $U = 0$.

$$\text{При } d' = \frac{d}{2} \quad E_0 = \frac{v B}{1 + \frac{2\epsilon_0 S}{C d}} \quad \text{и } U = \frac{\epsilon_0 v B S}{C + \frac{2\epsilon_0 S}{d}}$$

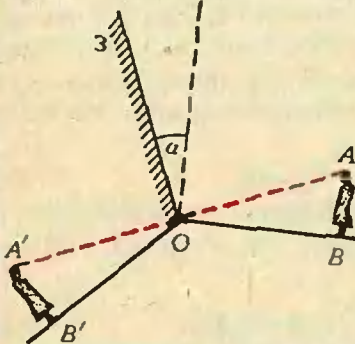
При $d' = d$ поля E_0 не будет, $E = vB$, а напряжение на конденсаторе C всегда будет $U = vBd$ независимо от его емкости.

Е. А. Ромишевский

Ф976. Моль идеального одноатомного газа переводится из начального состояния в конечное, как показано на рисунке. Определите подведенное газу тепло, если разность начальной и конечной температур равна $\Delta t = 100^\circ \text{C}$.



Ф977. На стене, плоскость которой отклонена от вертикали на $4,87^\circ$ (см. рисунок), укреплено зеркало. С какого максимального расстояния человек, рост которого 170 см, сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?



Обратим внимание на то, что тепловой процесс задан в координатах p, T . Он состоит из трех участков: двух изобар (1→2) и (3→4) и изохоры (2→3). Постоянство объема на участке (2→3) вытекает из того, что давление p меняется пропорционально температуре T . Если обозначить молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и при постоянном давлении через c_V и c_p , можно записать $Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} = c_p(T_2 - T_1) + c_V(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3) = (2c_p - c_V)\Delta t$.

Для одноатомного идеального газа $c_V = \frac{3}{2}R$, $c_p = \frac{5}{2}R$ ($R = 8,31$ Дж/(моль·К)). Окончательно: $Q = \frac{7}{2}R \Delta t = 2910$ Дж/моль.

С. М. Козел

Изображение $A'B'$ человека AB в зеркале расположено симметрично самому человеку относительно плоского зеркала и равно по размерам человеку. Следовательно, предельный случай, когда человек увидит в зеркале хотя бы часть своего изображения, соответствует ситуации, приведенной на рисунке. Как видно, $\angle AOB = \alpha$ и

$$OB = AB / \text{tg } \angle AOB = AB / \text{tg } \alpha \approx AB / \alpha$$

(мы учли, что угол α мал и $\text{tg } \alpha \approx \alpha$).

Таким образом,

$$OB = \frac{AB}{\alpha} = \frac{1,7 \text{ м}}{\frac{4,87^\circ}{180^\circ \pi}} = 20 \text{ м.}$$

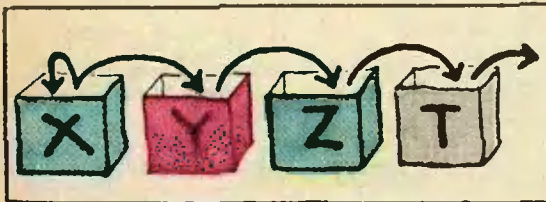
Е. П. Кузнецов

Зачем микрокалькулятору стек

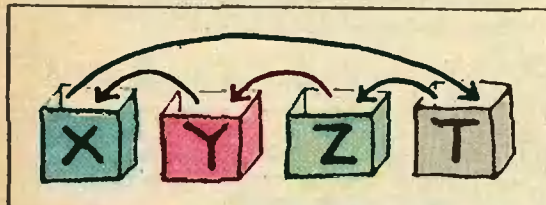
Кандидат физико-математических наук
Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

Эта статья предназначена в первую очередь девятиклассникам, пользующимся программируемым микрокалькулятором при изучении курса основ информатики и вычислительной техники. Однако статья будет полезной и многим другим пользователям калькуляторов (программируемых или нет), так как в ней рассказано о польской инверсной записи — очень простом приеме, позволяющем сильно упрощать организацию вычислений.

На программируемых калькуляторах «Электроника» БЗ-34, МК-56, МК-54 имеется интересное устройство — стек, которое состоит из четырех регистров: X, Y, Z, T, используемых на первый взгляд довольно странным образом. Команда \uparrow продвигает информацию в стек — содержимое T стирается, в T заносится содержимое Z, в Z — содержимое Y, в Y — содержимое X, которое остается и в X:

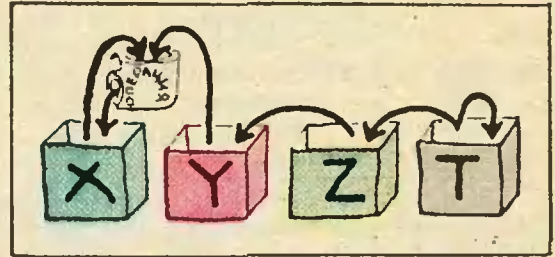


Команда \leftarrow двигает содержимое стека в обратную сторону, только содержимое X не стирается, а переходит в T.



Есть команда \overleftrightarrow{XY} , обменивающая содержимое X и Y и не затрагивающая остальных регистров. Если перед занесением числа в X или вызовом числа из регистра не выполнялась одна из операций \uparrow или \leftarrow , то перед занесением нового значения в X автоматически выполняется \uparrow , то есть пересылаются Z в T, Y в Z и X в Y.

При выполнении операций над двумя числами (например, $X+Y$ или $X \times Y$) эти числа берутся из Y и X, результат засылается в X, а весь стек сдвигается:



(следует иметь в виду, что операция X^Y работает не так). А вот при выполнении операций над одним числом (например, $\sin X$) все выполняется очевидным образом: аргумент берется из X, результат остается в X, и больше ничего никуда не двигается.

Почему же стек работает именно таким образом и как им надо пользоваться? Попробуем поработать со стеком.

Вычислим выражение $a \times b - c/d$. Предположим, что значение a, b, c и d находятся в регистрах a, b, c и d соответственно. Оставим промежуточный результат в стеке, не засылая его в память, и продолжим вычисления — посмотрим, что из этого выйдет.

Таблица 1

№	Команда	Содержимое стека			
		X	Y	Z	T
00	ИП a	a			
01	ИП b	b	a		
02	\times	$a \times b$			
03	ИП c	c	$a \times b$		
04	ИП d	d	c	$a \times b$	
05	\div	c/d	$a \times b$		
06	$-$	$a \times b - c/d$			

Нетрудно видеть, что эта программа — наилучшая из всех возможных, так как в ней нет ни одной лишней команды: вызвать из регистров исходные данные надо — значит, без четырех команд ИП не обойтись, и три операции выполнить надо.

а больше в программе ничего и нет. Похоже, что стек — замечательная вещь: попробуем еще с ним поработать, только выражение возьмем сложнее:

$$\frac{p - \frac{d}{(a+b)}}{(e+f)} \times (k+l). \quad (*)$$

Регистры распределять не будем (их можно распределить как угод-

но), а в командах П и ИП для наглядности будем писать имя переменной (то есть запись «ИПр» означает «вызов в X числа из того регистра, где хранится значение p»). Пишем программу и следим за стеком (все промежуточные результаты оставляем в стеке: см. табл. 2).

Подведем итоги: 23 команды, из них 15 нужных (ИП и операции) и 8 лишних (помечены звездочками

Таблица 2

№	Команда	Содержимое стека				Комментарий
		X	Y	Z	Г	
00	ИП a	a				Как нас учили в первом классе, начинаем с выражений в скобках
01	ИП b	b	a			
02	+	a+b				
03	ИП e	e	a+b			Оставляем промежуточный результат в стеке: посмотрим, куда он денется в итоге.
04	ИП f	f	e	a+b		
05	+	e+f	a+b			И этот промежуточный результат оставим в стеке.
06	ИП k	k	e+f	a+b		
07	ИП l	l	k	e+f	a+b	Стек на пределе — сейчас потеряем a+b!
08	+	k+l	e+f	a+b	a+b	Нет, пронесло! (a+b) сохранилось.
09*	F○	e+f	a+b	a+b	k+l	Сейчас надо бы поделить d на (a+b), но (a+b) где-то глубоко-глубоко. С трудом достали тремя лишними командами.
10*	F○	a+b	a+b	k+l	e+f	
11*	F○	a+b	k+l	e+f	a+b	
12	ИП d	d	a+b	k+l	e+f	Значения d и a+b вызваны, но они не в тех регистрах: придется менять местами.
13*	\overleftarrow{XY}	a+b	d	k+l	e+f	
14	÷	$\frac{d}{a+b}$	k+l	e+f	e+f	И опять оставим результат в стеке.
15	ИП p	p	$\frac{d}{a+b}$	k+l	e+f	Опять числа не в том порядке и надо менять их местами.
16*	\overleftarrow{XY}	$\frac{d}{a+b}$	p	k+l	e+f	
17	—	$p - \frac{d}{a+b}$	k+l	e+f	e+f	
18*	F○	k+l	e+f	e+f	$p - \frac{d}{a+b}$	Похоже, стек издевается над нами: нужные промежуточные результаты в самых неудобных местах — не сразу поймешь, где они и как их достать.
19*	F○	e+f	e+f	$p - \frac{d}{a+b}$	k+l	
20*	F○	e+f	$p - \frac{d}{a+b}$	k+l	e+f	
21	÷	$\frac{\left(p - \frac{d}{a+b}\right)}{e+f}$	k+l	e+f	e+f	Хоть на последней операции повезло: нужные промежуточные результаты как раз на месте.
22	×	ответ	e+f	e+f	e+f	

в программе). Очевидно, что если бы эти результаты мы вовремя запомнили в регистрах памяти, то сэкономили бы себе не меньше половины из этих 8 лишних команд. Да покаобразишь, где сейчас в стеке какой результат... Лучше без стека!

Но прежде чем отказаться от стека, давайте попробуем понять, почему в первой программе стек «вел себя» так хорошо, а во второй, наоборот, «вел себя» так плохо. Для этого нам придется отправиться лет на 60 назад в гости к польскому математику Яну Лукасевичу, который не имел ни малейшего понятия о микрокалькуляторах, но все же изобрел одну замечательную конструкцию, ныне отлично известную тем, кто пишет трансляторы для ЭВМ, и получившую название *польская инверсная запись*.

В операциях над двумя числами мы ставим знак между числами; над одним числом — перед этим числом. Лукасевич предложил ставить знак всегда перед числами (*прямая польская запись*) или всегда после них (*инверсная польская запись* — именно она нас и будет интересовать), то есть вместо $a-b$ писать $ab-$ и вместо $lg a$ писать $a lg$.

Первое впечатление: «Ну и что? Можно писать и так. Только неудобно и непривычно». Непривычно? Да. А вот неудобно ли? Запишем в инверсной польской записи выражения $(a+b) \times c$ и $a+b \times c$. В первом из них умножаются выражение $a+b$ (которое само должно быть записано в польской записи $ab+$) и число c ; во втором — складываются a и выражение $b \times c$ (записанное в польской записи $bc \times$). Итак:

$$\begin{aligned} (a+b) \times c &\rightarrow \boxed{ab+} \boxed{c} \times \\ a+b \times c &\rightarrow \boxed{a} \boxed{bc \times} + \end{aligned}$$

Красным показано, какие числа захватывает операция. Посмотрите на польскую запись: скобки исчезли — они не нужны, операции выстроились в том порядке, в котором они выполняются, и о старшинстве операций можно забыть: операции просто выполняются по порядку — слева направо. (Если бы нас с первого

класса приучали к таким правилам арифметики! Насколько проще было бы!)

Запишем теперь в польской записи выражение, для которого мы составили первую программу:

$$ab \times cd \div -$$

Теперь достаточно взглянуть на программу... и все станет ясно: наша программа — точная копия польской записи.

Польская запись выражения (*) такова:

$$\boxed{p} \boxed{d} \boxed{ab+} \boxed{\div} \boxed{-} \boxed{ef+} \boxed{\div} \boxed{kl \times} \boxed{-}$$

Теперь взглянем на нашу программу вычисления этого выражения... и сразу станет ясно, что мы там натворили и почему стек себя «плохо вел». Если написать программу точно по польской записи, то получим ровно 15 команд — ни одной лишней!

— Замечательно! — скажет читатель. — Только как получить из обычной записи польскую?

Очень просто. Запишем выражение (*) в линейризованной записи (то есть без многоэтажных формул):

$$p - (d / (a + b)) / (e + f) \times (k + l)$$

и применим 3 простых правила:

1. Выпишем числа и переменные в том порядке, в каком они записаны: $pdabefkl$.

2. Выпишем операции в том порядке, в котором они должны выполняться (при условии, что всегда выполняется первая слева операция, которая уже может быть выполнена): $+/-+/-+ \times$

3. Вставим операции непосредственно после соответствующих чисел.

$$\begin{array}{cccccccc} + & / & - & + & / & + & \times & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ p & d & a & b & e & f & k & l \end{array}$$

На самом деле заранее формировать польскую запись не обязательно, можно это сделать в процессе написания программы. Программируем тот же пример, читая линейризо-

ванную запись символ за символом (только скобки не читаются, а принимаются к сведению; см. табл. 3).

Получили оптимальную программу: 8 вызовов данных и 7 операций. И стек «ведет себя» отменно: обратите внимание, как «качаются» промежуточные результаты в стеке, но в нужный момент они оказываются

всегда на месте и в подходящем порядке. Можно математически доказать, что так всегда и будет. (Только операция X^Y ведет себя не так: дело в том, что ... она просто неправильно реализована — у всех операций над двумя числами первое число в Y , второе в X , у этой — наоборот; все операции над двумя числами двигают

Таблица 3

Читаемый символ	Рассуждения	Записываемая команда	При выполнении в стеке будет				
			X	Y	Z	T	
p	Числа и переменные всегда записываются в стек	ИП p	1	p			
—	Операцию выполнить нельзя, — не над чем! — пропускаем.						
d	Переменную — в стек.	ИП d	2	d	p		
/	Операция не готова к выполнению — пропускаем.						
a +	Переменную — в стек. Пока еще ни одну операцию выполнить нельзя.	ИП a	3	a	d	p	
b	В стек.	ИП b	4	b	a	d	p
	Наконец встретилась операция, для которой оба числа в стеке. Выполним ее.	+	3	$a+b$	d	p	.
	Нет ли у нас отложенных операций, для которых готовы данные? Есть — деление. Выполним его (а где нужные числа? — можно не заботиться — как раз на местах).	÷	2	$\frac{d}{a+b}$	p		
	И опять появилась операция, для которой данные готовы — выполняем ее.	—	1	$p - \frac{d}{a+b}$			
/	Больше выполнять нечего — читаем очередной символ и откладываем операцию — не готова она.						
e	В стек. Выполнять пока нечего.	ИП e	2	e	$p - \frac{d}{a+b}$		
+	Пропускаем — не готова она.						
f	В стек.	ИП f	3	f	e	$p - \frac{d}{a+b}$	
	Готовы числа для сложения — выполняем.	+	2	$e+f$	$p - \frac{d}{a+b}$		
	Теперь готовы данные для деления — выполняем.	÷	1	$\frac{p - \frac{d}{a+b}}{e+f}$			
×	Пропускаем — не над чем						
k +	В стек. Для $\cdot \times \cdot$ и $\cdot + \cdot$ данные по-прежнему не готовы.	ИП k	2	k	↘ ...		
l	В стек. И можно выполнить $\cdot + \cdot$	ИП l	3	l	k	↘ ...	
	Выполняем сложение. Все готово и для умножения.	+	2	$k+l$... ↙		
	Выполняем умножение. Конец.	×	1	ответ			

стек, эта — нет; так что при ее программировании указанным методом придется писать \overleftarrow{XY} , $\overleftarrow{FX^Y}$, $\overleftarrow{XY}F \approx$ или вместо X^Y писать $e^{Y \times \ln X}$ — тогда все получится.)

Теперь стало понятно, почему стек работает именно таким образом, и, оказывается, даже не надо следить, где какой результат находится в каждый момент: в нужный момент он будет там, где надо.

Но... а вдруг нам не хватит 4 регистров стека? Тогда промежуточный результат надо записать в память. Но как определить, хватит нам стека или нет? Неужели следить за всеми качаниями стека? Нет, на самом деле все проще: взглянем на столбец таблицы, над которым нет заголовка, — в нем какие-то цифры — они показывают, сколько регистров стека занято (всю таблицу стека писать не надо, а эти цифры писать надо). Правило заполнения столбца очень простое: каждая команда ИП

добавляет единицу, каждая операция над двумя числами уменьшает предыдущее число на единицу, операции над одним числом не изменяют его. И если появилось число 5, то в этот момент при очередном «качке» стека один из промежуточных результатов будет утерян.

Как тогда быть? Подробно ответить на этот вопрос не позволяет объем статьи. Мы заметим лишь, что в такой ситуации всегда можно воспользоваться регистрами памяти, но часто удается так переорганизовать формулу, по которой ведутся вычисления, чтобы не происходило переполнение стека.

В заключение заметим, что польская инверсная запись весьма удобна при организации вычислений на (непрограммируемом) инженерном калькуляторе: ее использование позволяет исключить списывание с индикатора многих промежуточных результатов.

О математике гармонических колебаний

(Начало см. на с. 9)

в созданную еще И. Ньютоном модель звуковых волн: на прямой в направлении распространения звука рассматривается система массивных осциллирующих точечных грузиков, соединенных маленькими пружинками, лишенными массы. Кинетическая энергия этой системы сосредоточена в грузиках, а потенциальная запасается в пружинах. Такая система называется *системой связанных осцилляторов* на прямой. Такие системы можно рассматривать и на плоскости, и в пространстве.

Системы связанных осцилляторов оказались очень удобной моделью во многих разделах механики и физики. Даже такая очень непростая наука, как физика элементарных частиц, в качестве одной из своих основ — модели физического вакуума — использует систему связанных осцилляторов. С этой точки зрения вакуум можно рассматривать как очень сложный музыкальный инструмент, который отзывается теми или иными колебаниями на любое внешнее воздействие.

Используя площадь...

(Начало см. на с. 16)

Упражнения

1. Даны правильный треугольник ABC и точка O внутри него; A' , B' и C' — проекции этой точки на высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 соответственно. Докажите, что величина $AA' + BB' + CC'$ не зависит от выбора точки O .

2. Докажите, что в выпуклом многоугольнике, все углы которого равны, сумма длин перпендикуляров, опущенных из любой внутренней точки O на стороны многоугольника (или на их продолжения), не зависит от положения точки O .

3. Докажите, что если противоположные стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

4. Докажите, что длина биссектрисы угла B треугольника ABC равна $\frac{2ac}{a+c} \cos \frac{\beta}{2}$.

5. Докажите с помощью площади, что каждая медиана треугольника делится любой другой медианой в отношении $2:1$, считая от вершины, и тем самым медианы треугольника пересекаются в одной точке.

6. На стороне AC треугольника ABC взята точка D . Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников ABD и BCD больше радиуса вписанной окружности треугольника ABC .



IX. Сумматор

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН,
В. Я. СИНДАЛОВСКИЙ

Сумматор, как следует из его названия, предназначен для выполнения в ЭВМ операции сложения. Если учесть, что все математические операции, осуществляемые ЭВМ, — умножение, деление, возведение в степень, вычисление интегралов, решение дифференциальных уравнений и т. д. — в конечном счете сводятся к выполнению по определенным программам операций сложения, станет ясно, что сумматор — один из самых важных узлов ЭВМ.

Сумматор складывает два числа, работая по тем же правилам, что и мы, когда выполняем сложение «в столбик».

Сложим, например, два числа: $A=10010$ и $B=1011^*$. Сумма чисел C равняется

$$\begin{array}{r} 10010 \\ + 1011 \\ \hline 11101 \end{array}$$

Сформулируем правила, которыми мы руководствуемся, выполняя операцию сложения. Мы складываем число, записанное в младшем разряде числа A (a_1), с числом, записанным в младшем разряде числа B (b_1). Если результатом сложения оказались 0 или 1, мы записываем результат в младший разряд числа C (c_1). Однако результатом сложения может оказаться и 2. Такой результат для двоичной системы соответствует переносу единицы в следующий, более старший разряд («ноль пишем, один в уме!»).

Переходя к сложению следующих, вторых разрядов, мы фактически должны складывать не два числа a_2 и b_2 , а три: a_2 , b_2 и третье число, которое мы обозначим p_1 . Если в результате проделанного раньше сложения в младшем разряде единица в старший не переходит, $p_1=0$, а если переходит, то $p_1=1$. Результатом сложения во втором разряде будут два числа: второй разряд суммы c_2 и p_2 — число, подлежащее сложению с a_3 и b_3 в следующем, третьем разряде. Разумеется, как c_2 , так и p_2 могут равняться либо 0, либо 1.

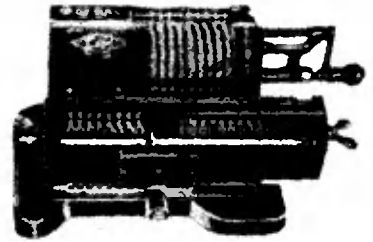
Точно так же выполняется сложение и во всех последующих разрядах, вплоть до старшего.

Для наглядности запишем сформулированные правила в форме таблицы истинности.

Таким образом, схема сумматора, выполняющая сложение одного разряда двух чисел (так называемого одноразрядного сумматора), должна иметь три входа, на которые подаются сигналы a_n , b_n и p_{n-1} , и два выхода, на которых формируются сигналы c_n и p_n .

Одна из возможных схем одноразрядного сумматора показана на рисунке 1.

*Числа A , B и сумма C записаны в двоичной системе, в которой обычно хранится и перерабатывается в ЭВМ вся информация.



Сумматор эпохи механических вычислительных машин. Время суммирования двух чисел на нем зависело от ловкости, с которой оператор передвигал рычажки и крутил ручку, и составляло от 1 до 10 секунд. Для сложения ручку вращали в одну сторону, а для вычитания — в другую. Умножение и деление сводилось к последовательным сложениям или вычитаниям и занимало до одной минуты.

Быстродействие современных сумматоров на основе кремниевых биполярных транзисторов достигает сотен миллионов сложений в секунду.

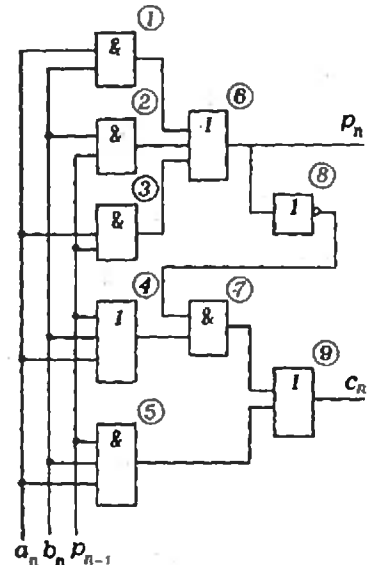
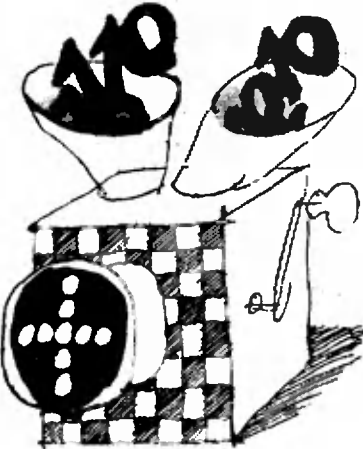


Рис. 1. Одноразрядный сумматор. Входные сигналы обозначены буквами a_n , b_n и p_{n-1} , выходные — c_n и p_n . Цифрами в кружках условно пронумерованы логические схемы, образующие сумматор.

Значение слагаемых			Значение результата	
a_n	b_n	p_{n-1}	c_n	p_n
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Таблица истинности.



Как бы ни были сложны действия, выполняемые в ЭВМ, в конечном итоге они сводятся к многочисленным операциям суммирования двоичных чисел. Даже такие сложнейшие логические задачи, как игра в шахматы, тоже могут быть решены при помощи операций суммирования. В 1967 году состоялся первый шахматный матч между электронными вычислительными машинами СССР и США. Матч состоял из четырех вариантов. Глубина просмотра вариантов составляла до 5 полуходов (то есть ходов как своих, так и противника). Со счетом 3:1 победила советская шахматная программа. Современные шахматные программы уже сейчас играют в силу мастера спорта.

Рис. 2. Многоразрядный сумматор. Он складывает много-разрядные двоичные числа A и B , разряды которых обозначены соответственно a_n, a_1, \dots, a_0 и b_n, b_1, \dots, b_0 . Разряды суммы C обозначены c_n, c_1, \dots, c_0 .

Прежде всего обратим внимание на то, что она содержит только хорошо знакомые нам простейшие логические схемы типа И, ИЛИ и НЕ.

Разберем работу одноразрядного сумматора на примере сложения двух чисел $a_n=1; b_n=0$ при наличии сигнала переноса $p_{n-1}=1$. На входы схемы 1 типа И поступают сигналы $a_n=1$ и $b_n=0$. Следовательно, на ее выходе вырабатывается сигнал 0. Такой же сигнал будет на выходе схемы 2 ($b_n=0; p_{n-1}=1$). На выходе схемы 3 вырабатывается сигнал 1 ($a_n=1; p_{n-1}=1$). Схема 6 типа ИЛИ имеет три входа, на одном из которых действует сигнал 1, а на двух остальных — 0. На ее выходе формируется сигнал $p_n=1$.

Далее, с выхода схемы 6 сигнал 1 поступает на вход инвертора 8, а с его выхода сигнал 0 — на вход схемы И 7. На второй вход схемы 7 подается сигнал с выхода схемы ИЛИ 4. При рассматриваемой комбинации входных сигналов он соответствует 1.

На выходе схемы 7 формируется 0, который поступает на вход схемы ИЛИ 9. На второй вход схемы 9 поступает сигнал со схемы И 5, в данном случае 0. В результате выходной сигнал $c_n=0$.

Как мы видим, схема выдала правильный результат $c_n=0; p_n=1$. Удостоверьтесь сами, что результат сложения будет правильным при любой комбинации входных величин a_n, b_n и p_{n-1} .

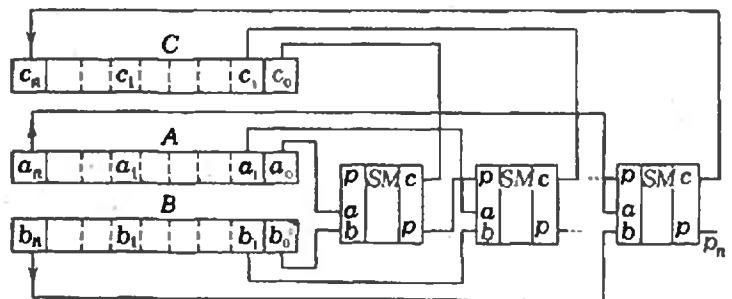
Для суммирования многоразрядных двоичных чисел необходимо соединить между собой столько одноразрядных сумматоров, сколько разрядов содержат складываемые числа (рис. 2).

Вспоминая, что числа в больших ЭВМ могут содержать 48 разрядов, что за каждым квадратиком, обозначающим простейшую логическую операцию, в действительности скрывается электронная схема, содержащая несколько транзисторов, мы приходим к выводу, что сумматор, складывающий многоразрядные числа в ЭВМ, представляет собой весьма сложный узел.

Итак, мы познакомились с работой регистра и сумматора. Обратили ли вы внимание, что чем дальше мы отходим от «одиночной клетки», на основе которой строится ЭВМ, — транзистора, — чем более сложные схемы мы анализируем, тем больше меняется предмет разговора, методы анализа, сам язык, на котором ведется обсуждение. Это не случайно. Из области физики полупроводниковых приборов мы вступили в царство совсем другой науки — схемотехники.

Основы этой науки заложены выдающимися математиками, логиками, инженерами. Она очень интересна и глубоко разработана. Но это предмет совсем другого разговора.

Наш рассказ о полупроводниковых элементах вычислительной техники подходит к концу. И закончим мы его в следующем номере журнала, рассказав о перспективных полупроводниковых элементах для будущих ЭВМ.





Вспомогательный куб

Кандидат физико-математических наук
М. Р. ЛИБЕРЗОН

При решении задач по стереометрии уже на самом первом шаге часто возникают трудности. Нужно обладать хорошо развитым геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую пространственную картину. Если речь идет о геометрических телах, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни (куб, шар, цилиндр, параллелепипед и т. п.), то эти предметы легко себе представить. Как их рисовать, известно. Значительно труднее изобразить, например, скрещивающиеся прямые или совокупность прямых и плоскостей в пространстве. И не просто изобразить, а сделать чертеж, помогающий решению задачи.

Существует метод, позволяющий в ряде случаев преодолеть указанные

трудности. Он основан на следующем соображении. Если пространственная конфигурация трудно воспринимается и не связана с конкретным геометрическим телом, то попробуем искусственно ее связать с каким-нибудь телом. Например, с кубом.

Изображенный на бумаге куб облегчает работу нашему воображению. На рисунке 1, например, отчетливо видно, что прямые l и m являются скрещивающимися. Убрали куб (рис. 2), и пространственная наглядность исчезла — мы видим пересекающиеся прямые l и m на плоскости.

Другой пример. Три луча l , m и n , исходящие из одной точки A_1 , нарисованы на кубе (рис. 3). Ясно, что они представляют собой ребра трехгранного угла. На рисунке 4 куба нет, поэтому картинка стала плоской. Чтобы увидеть на ней тот же трехгранный угол, мы должны заставить свое воображение потрудиться.

Использование вспомогательного куба не только «превращает» плоскую картину в объемную, но и указывает пути решения ряда задач. Про-

демонстрируем это на следующих примерах*).

Задача 1. Плоские углы трехгранного угла равны 45° , 45° и 60° . Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен 45° . Найти угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.

Решение. Рассмотрим вспомогательный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 5). Проведем диагонали AB_1 и AC двух его смежных граней. Имеем $B_1 \widehat{A} B = 45^\circ$, $B \widehat{A} C = 45^\circ$, $B_1 \widehat{A} C = 60^\circ$ как угол правильного треугольника $AB_1 C$. Следовательно, трехгранный угол $AB_1 C$ — это угол, о котором говорится в условии задачи. Ребро AA_1 проходит через его вершину A и перпендикулярно грани BAC . Значит, требуется найти величину угла $A_1 \widehat{A} B_1$. Ответ очевиден: $A_1 \widehat{A} B_1 = 45^\circ$.

Решение этой задачи без использования куба довольно сложно и существенно длиннее**). Здесь нам вообще не пришлось считать: ответ удалось «прочитать» на кубе. Но такие случаи редки.

Задача 2. Угол между двумя гранями трехгранного угла прямой, а величина каждого плоского угла этих граней равна α . Найти величину плоского угла третьей грани.

Решение. Сначала будем считать угол α острым. Пусть вершина A вспомогательного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 6) является вершиной трехгранного угла, а отрезки AM , AB и AN — его ребрами (если $\alpha > 45^\circ$, то точки M и N лежат на продолжениях ребер BB_1 и BC). Требуется найти угол MAN .

Опустим из точки M перпендикуляр MP на отрезок AN и соединим точки B и P . По теореме о трех перпендикулярах отрезок BP перпендикулярен отрезку AN . Из прямоугольных треугольников APB и ABM получаем

$$|AP| = |AB| \cdot \cos \alpha, \quad |AM| = \frac{|AB|}{\cos \alpha}.$$

*Разобранные в настоящей статье задачи в разные годы предлагались на письменных вступительных экзаменах по математике на различных факультетах МГУ им. М. В. Ломоносова.

** Оба решения (с кубом и без него) приводятся в книге Дорощева Г. В., Потапова М. К., Розова Н. Х. «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М. «Наука», 1976, с. 467—469).

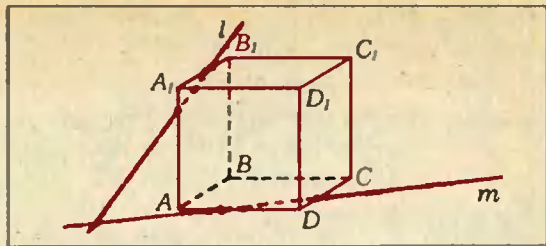


Рис. 1.

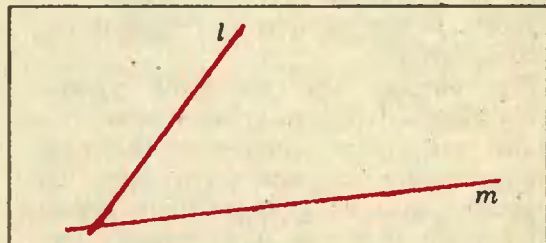


Рис. 2.

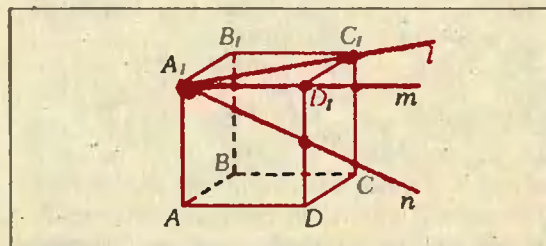


Рис. 3.

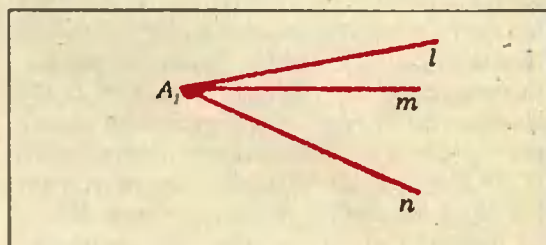


Рис. 4.

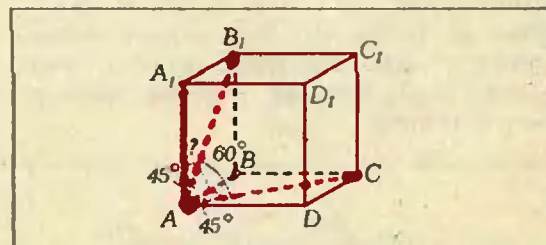


Рис. 5.

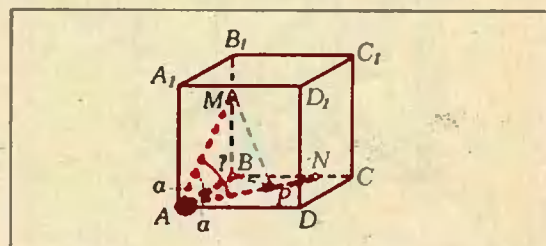


Рис. 6.

Искомый угол \widehat{MAN} — острый угол прямоугольного треугольника APM ; поэтому

$$\cos \widehat{MAN} = \frac{|AP|}{|AM|} = \frac{|AB| \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{|AB|} = \cos^2 \alpha,$$

$$\widehat{MAN} = \arccos(\cos^2 \alpha).$$

Если угол $\alpha = 90^\circ$, то искомый угол прямой, что также может быть записано полученным соотношением.

Итак, ответ во всех случаях один: $\arccos(\cos^2 \alpha)$.

Мы видим, что на кубе удобно изображать трехгранные углы, две грани которых перпендикулярны. Это связано с тем, что куб содержит прямые двугранные углы. Но в кубе заложен и линейный размер — длина его ребра. Это дает возможность изображать на чертеже и величины расстояний.

Задача 3. Основание MN и вершина K равнобедренного треугольника MNK находятся на различных гранях прямого двугранного угла с ребром l . Точки M и K удалены от l на расстояние a , а проекция точки N на ребро l равноудалена от проекций точек M и K на ребро l . Найти расстояние от точки N до l , если MK образует с l угол, равный 60° .

Решение. Пусть длина ребра вспомогательного куба $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ равна a и двугранный угол из условия задачи образован гранями AA_1B_1B и $ABCD$ (рис. 7). Тогда точка M лежит на ребре A_1B_1 , а точка K — на ребре CD (или на их продолжениях). Совместим точку M с вершиной куба A_1 . Пусть точка K находится на ребре CD (она может находиться на продолжении ребра CD за вершину D , что не меняет наших рассуждений).

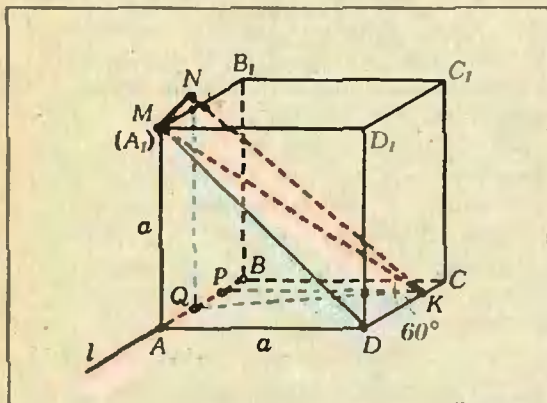


Рис. 7.

Опустим перпендикуляр KP на ребро AB и отметим середину Q отрезка AP . В плоскости грани AMB_1B составим из точки Q перпендикуляр к ребру AB . Вершина N треугольника MNK лежит на этом перпендикуляре, так как ее проекция Q равноудалена от проекций точек M и K . Заметим, что точка N расположена выше ребра MB_1 ; в противном случае треугольник MNK не будет равнобедренным.

Проведем отрезки MD и KQ . $|MD| = a\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной a . По условию угол между скрещивающимися прямыми AB и MK равен 60° . Но прямая CD параллельна прямой AB , следовательно, $\widehat{MKD} = 60^\circ$. Из прямоугольного треугольника MDK находим

$$|MK| = \frac{|MD|}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad |DK| = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

По условию $|NK| = |MK|$ и $|AP| = |DK|$. Тогда $|QP| = \frac{1}{2}|AP| = \frac{1}{2}|DK| = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Из прямоугольного треугольника QPK находим $|QK|^2 = |QP|^2 + |KP|^2 = 7a^2/6$. Наконец, из прямоугольного треугольника NQK получаем

$$|NQ| = \sqrt{|NK|^2 - |QK|^2} = \sqrt{|MK|^2 - |QK|^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}.$$

Задача решена.

Задача 4. В треугольнике LMN дано: $\widehat{LNM} = 90^\circ$, $\widehat{MLN} = 30^\circ$. На перпендикуляре к отрезку LN , проходящем в пространстве через точку L , взята такая точка F , что $|LF| = |MN|$. Плоскости, которым принадлежат треугольники LMN и LNF , образуют двугранный угол, равный 60° . Найти острый угол между прямыми LM и NF .

Решение. Разместим треугольник LMN на грани вспомогательного куба $ABCD, A_1B_1C_1D_1$, так, как показано на рисунке 8, то есть точку L совместим с вершиной A_1 , а точку N — с вершиной A . Пусть $|MN| = a$. Проведем в верхней и нижней гранях куба соответственно отрезки LP и NQ так, что $\widehat{PLD_1} = \widehat{QND} = 60^\circ$. Двугранный угол, образованный плоскостями LND_1D и $LNPQ$, равен 60° . На отрезке LP возьмем такую точку F , чтобы $|LF| = |MN| = a$. Соединим точки N и

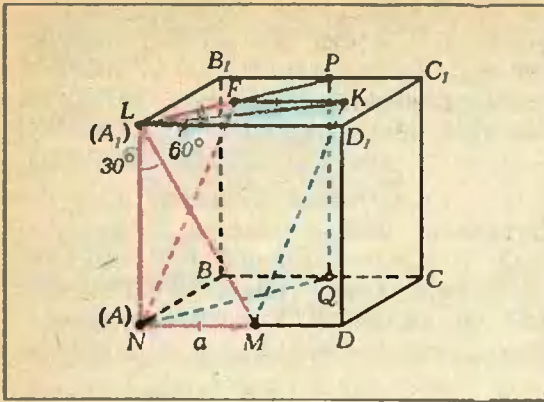


Рис. 8.

F. Наш чертеж полностью соответствует условию задачи.

Найдем угол между прямыми LM и NF . Через точку F проведем отрезок FK параллельно ребру LD_1 и равный по длине a . Точку K соединим с точками M и L . Угол LMK искомый, так как прямая MK параллельна прямой NF (четыреугольник $NFKM$ — параллелограмм). Из прямоугольного треугольника LNM найдем $|LM| = 2a$. Треугольники LNM и NLF равны (по двум катетам), поэтому $|NF| = |LM| = 2a$. Значит, и $|KM| = 2a$. В треугольнике LFK $|LF| = |FK| = a$, $LFK = 120^\circ$. Отсюда $|LK| = a\sqrt{3}$. Из треугольника LMK находим

$$\cos \widehat{LMK} = \frac{|LM|^2 + |KM|^2 - |LK|^2}{2|LM| \cdot |KM|} = \frac{8a^2 - 3a^2}{2 \cdot 4a^2} = \frac{5}{8},$$

то есть $\widehat{LMK} = \arccos \frac{5}{8}$.

Задача 5. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 60° . Точка M лежит на одной прямой, а точка N — на другой, причем расстояния от каждой из этих точек до общего перпендикуляра скрещивающихся прямых одинаковы и равны расстоянию между прямыми. Какие значения может принимать острый угол между общим перпендикуляром и прямой MN ?

Решение. Пусть одна из скрещивающихся прямых проходит через вершины A и D вспомогательного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Вторую прямую проведем через вершину A_1 под углом 60° к ребру $A_1 D_1$ в плоскости грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 9). Тогда ребро AA_1 есть общий перпендикуляр к данным прямым. Расстояние между прямыми

равно длине ребра куба a , значит, точки M и N удалены от отрезка AA_1 на расстояние a . Совместим точку M с вершиной D . Возможны два варианта расположения точки N .

1. Точка N лежит внутри грани $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Проведем отрезки ND_1 и MN . Треугольник $A_1 N D_1$ равносторонний, следовательно, $|ND_1| = a$. Искомый угол между прямыми MN и AA_1 равен углу NMD_1 , так как прямая AA_1 параллельна MD_1 . В треугольнике $ND_1 M$

$$|ND_1| = |MD_1| = a, \widehat{MD_1 N} = 90^\circ.$$

Значит, $\widehat{NMD_1} = 45^\circ$.

2. Точка N лежит вне грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ (на рисунке 9 точка N_1).

Проведем отрезки $N_1 D_1$ и MN_1 . Треугольник $N_1 A_1 D_1$ равнобедренный с углом при вершине 120° и боковыми сторонами, равными a . Следовательно, $|N_1 D_1| = a\sqrt{3}$. Искомый угол между прямыми AA_1 и MN_1 равен углу $N_1 M D_1$. Из треугольника $N_1 D_1 M$ находим $\widehat{N_1 M D_1} = 60^\circ$.

Мы видим, что введение вспомогательного куба существенно упрощает решение. В следующей задаче, как и в задаче 1, мы благодаря кубу найдем нужный угол без вычислений.

Задача 6. Основанием пирамиды $HPQR$ является равнобедренный прямоугольный треугольник PQR , длина гипотенузы PQ которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды HR перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна 1. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра PR , а другая проходит через точку R и середину ребра PQ .

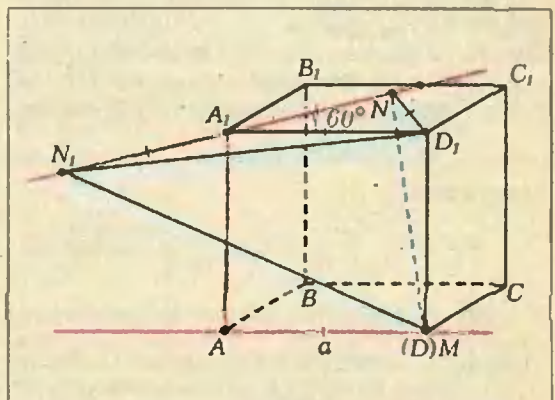


Рис. 9.

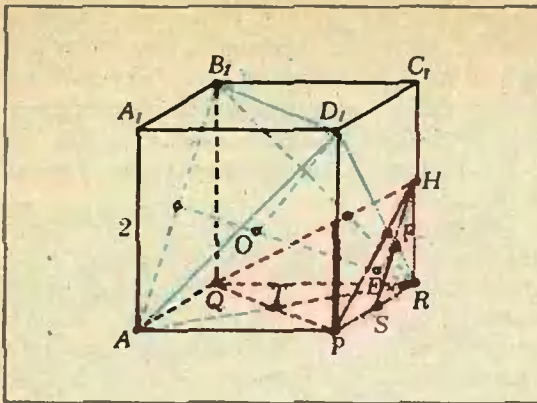


Рис. 10.

Решение. Пусть длина ребра вспомогательного куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равна 2. Тогда диагональ каждой его грани равна $2\sqrt{2}$. Поместим пирамиду $HPQR$ внутрь куба так, чтобы точки P , Q и R совпали соответственно с точками D , B и C (рис. 10). Точка H совпадает с серединой ребра RC_1 .

Соединим точку H с серединой S ребра PR . Проведем диагональ RA нижней грани куба. Точка T пересечения диагоналей RA и PQ — середина отрезка PQ . Требуется найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми HS и RT .

Проведем диагонали C_1P , B_1A и B_1R боковых граней куба. Очевидно, что отрезок HS параллелен отрезку B_1A . Поэтому искомый угол — это угол B_1AR , который равен 60° (треугольник B_1AR равносторонний).

Заметим теперь, что плоскость треугольника B_1AR содержит отрезок RT и параллельна отрезку HS . Поэтому искомое расстояние равно расстоянию между прямой HS и плоскостью B_1AR .

Рассмотрим правильный тетраэдр с основанием B_1AR и вершиной D_1 . Пусть D_1O — высота тетраэдра. Из точки F пересечения отрезков D_1R и HS опустим перпендикуляр FE на от-

резок RO . Отрезок FE перпендикулярен плоскости B_1AR , ибо отрезок FE параллелен отрезку D_1O . Значит, искомое расстояние равно $|FE|$. Из подобия треугольников D_1OR и FER

$$\frac{|FE|}{|D_1O|} = \frac{|FR|}{|D_1R|} = \frac{1}{4}.$$

Осталось найти высоту тетраэдра D_1O . В прямоугольном треугольнике D_1OR гипотенуза $|D_1R| = 2\sqrt{2}$, а катет RO составляет $2/3$ высоты правильного треугольника B_1AR со стороной $2\sqrt{2}$, то есть $|RO| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Тогда

$$|D_1O| = \sqrt{|D_1R|^2 - |RO|^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ На-}$$

конец,

$$|FE| = \frac{1}{4}|D_1O| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задачи

1. У трехгранного угла $OABC$ угол между гранями OAB и OBC прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна γ . Найти величину плоского угла AOC .

2. Вершины B и C треугольника ABC лежат на различных гранях двугрannого угла величины 45° с ребром l . Сторона AC перпендикулярна одной грани и пересекается с ней в своей середине. Проекция отрезка BC на другую грань параллельна ребру l и по длине равна расстоянию от точки C до l . Найти углы треугольника ABC .

3. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC вдвое короче катета BC . Через точку B проведена в пространстве прямая, перпендикулярная отрезку BC , и на этой прямой взята точка D так, что $|BD| = |AC|$. Двугранный угол между доуплоскостями, которым принадлежат треугольники BCD и ABC , равен 45° . Найти острый угол между прямыми AB и CD .

4. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 45° . Точка M лежит на одной из них, а точка N — на другой. Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых вдвое больше расстояния от точки M до него и вдвое меньше расстояния от точки N до него. Найти угол между общим перпендикуляром и прямой MN .

5. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. BD — высота треугольника ABC . Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC , причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC . Найти расстояние между точками S и E .

Поправка

В статье «Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы» («Квант», 1986, № 2, с. 46) имеются опечатки: 1) на с. 48 в алгоритме КОСИНУС вместо «нач вещь k» следует читать «нач»;

2) алгоритм на с. 57 должен иметь вид:

алг КОСИНУС;

нач вещь a2, b, c;

a2 := (ввод a)²;

выбод ((ввод b)² + (ввод c)² - a2)/2/b/c;

кон

3) в программе на с. 48 между командами 09 и 10 должна быть команда ИП 0.



Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Известно, что $x_1 = 4x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - (a+3)x + 2a = 0$. Найдите a .

2. Решите уравнение

$$\sin 2x + \cos 6x = 1 - 2 \cos^2 \left(5x + \frac{\pi}{4} \right).$$

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла BAD проходит через середину M стороны CD . Известно, что $|AB| = 5$, $|AM| = 4$. Найдите длину отрезка BM .

4. Решите неравенство

$$\frac{9 - 5^{2x}}{3 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^{x+1} + 3} < 4.$$

5. Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$ параллельно ребру CD проведена плоскость β , которая делит тетраэдр на две части равных объемов. Найдите расстояние от вершины B до плоскости β , если ребро тетраэдра равно 1.

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Определите, какое из двух чисел больше: $7 \cdot \sqrt[3]{7}$ или

$$2 \left(\frac{5}{4}^{\log_5 49} - \frac{1}{2}^{\log_{1/4} 7} \right).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + (y-4)^2 = 6, \\ 4x - xy = 2. \end{cases}$$

3. Точки M и N выбраны соответственно на основании BC и боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K , причем $|AK| = 3|KM|$, $|KN| = 2|BK|$. Найдите отношение $|CN| : |ND|$.

4. Решите уравнение

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos 9x.$$

5. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ точка M — середина ребра $C' D'$, точка N выбрана на ребре AB так, что $|AN| = 2|NB|$. Через вершину D и точки M и N проведена плоскость λ . Определите величину двугранного угла между плоскостью λ и плоскостью грани $ABCD$ куба.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации. Ниже после текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. В цилиндр сечением S_1 налита несжимаемая жидкость, поверх которой помещен поршень (рис. 1). Внутри этого поршня имеется цилиндрическая вставка сечением S_2 . Сила трения между поршнем и вставкой может достигать величины F ; между поршнем и стенками цилиндра трения нет. С какой минимальной силой нужно надавить сверху на вставку, чтобы выдвинуть ее из поршня? Силу тяжести не учитывать. (46%)

2. В схеме, изображенной на рисунке 2, напряжение на конденсаторе емкостью C_2 равно U , а конденсаторы емкостью C_1 и C_3 не заряжены. Ключ K попеременно переключают в положения A и B . Определите, какое количество теплоты выделится после очень большого числа переключений. (39%)

3. Стержень AC (рис. 3), на котором закреплены два одинаковых грузика B и C , подвешен за точку A к очень длинной нити DA ($DA \gg AC$). Стержень удерживали в горизонтальном положении, при котором нить была вертикальной, а затем отпустили. Какой будет скорость точки A в момент, когда стержень будет проходить нижнее положение? Массой стержня и нити пренебречь, $AB = l$, $BC = 2l$. (16%)

4. Пассажир летящего на высоте 10 км самолета видит восходящее Солнце. Оцените, через какое время увидит Солнце наблюдатель, стоящий на земле под самолетом. (67%)

5. На наклонной плоскости на равных расстояниях друг от друга размещены три ролика. Крайние ролики легко проворачиваются, средний — закреплен. Когда брусок кладут на средний и нижний ролики, он съезжает. Когда его кладут на верхний и средний — он не съезжает. Объясните явление. (33%)



Рис. 1.

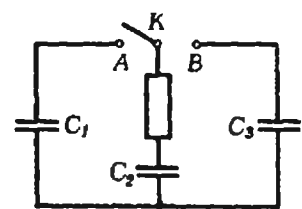


Рис. 2.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

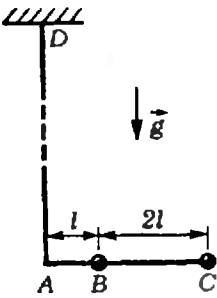


Рис. 3.

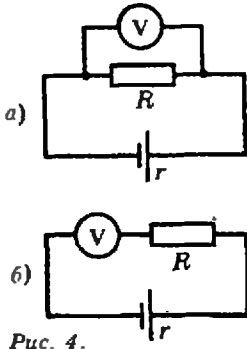


Рис. 4.

Вариант 2

1. В цепь, составленную из источника с внутренним сопротивлением r и резистора с сопротивлением R , включается вольтметр: первый раз параллельно резистору, второй раз последовательно с ним (рис. 4). Показания вольтметра в обоих случаях оказались одинаковыми. Найдите сопротивление вольтметра. (61%)

2. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R , центр которого находится на оптической оси линзы на расстоянии l от нее (рис. 5). Определите расстояние от линзы до точечного источника S , расположенного на оптической оси системы, при котором изображение источника совпадает с самим источником. (28%)

3. Два шарика массой M каждый скреплены невесомой пружиной жесткостью k . К ним через невесомые нити прикреплены еще два шарика массой m так, что вся система образует квадрат со стороной l , покоящийся на горизонтальном гладком столе (рис. 6, а). Затем эта связка постепенно раскручивается на столе вокруг ее центра масс до тех пор, пока квадрат не превратится в ромб с углом $\alpha=60^\circ$ (рис. 6, б). Определите угловую скорость вращения связки. (40%)

4. Как известно, предельный размер детали на киноплёнке определяется размерами кристалликов светочувствительного слоя. При этом с уменьшением размера кристалликов четкость изображения на кинокадре растет. Оцените предельный размер кристалликов, при котором кинозритель перестает замечать рост четкости изображения на экране кинозала. (48%)

5. В холодную колбу наливают горячую воду и на горлышко надевают воздушный шарик. Если взболтать воду, шарик сначала раздувается, а потом спадает. Если снова взболтать колбу, эффект раздувания опять повторяется, хотя и слабее. Объясните явление. (51%)

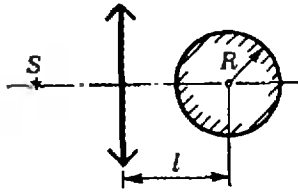


Рис. 5.

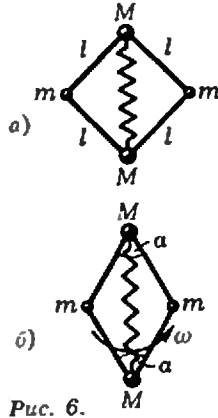


Рис. 6.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Найдите наименьшее значение функции $y=3x+e^{-2x}$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1+\sin^2 x} + 2 \cos \frac{x}{2} = 0.$$

3. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a , а радиус шара, вписанного в пирамиду, равен r .

4. Укажите, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ (y-ax)(y-a\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

в зависимости от параметра a .

5. Укажите все значения параметра a , для каждого из которых является правильным утверждение: если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$,

причем $\sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \beta$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < 0$.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x^2-2x-1$ на промежутке $[0; 2]$.

2. Решите уравнение

$$2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0.$$

3. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 30. Если вычесть из первого числа 5, из второго 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Решите неравенство

$$\log_2^2 x - \log_{1/2} x < 12 - 3 \sqrt{\log_{1/2}^2 x + \log_2 \frac{x}{4}}.$$

5. Вершина угла ABC , величина которого меньше 180° , находится на окружности l_1 , а одна из его сторон проходит через центр этой окружности. Окружность l_2 вписана в угол ABC и внешне касается окружности l_1 . Найдите, при каком значении угла ABC радиус окружности l_2 в 24 раза больше радиуса окружности l_1 .

Вариант 3

(радиофизический факультет)

1. Решите уравнение

$$4 \cos^2 x + 4 \sin x = 1.$$

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 5$$

на промежутке $[-2; 1]$.

3. Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 4^{x+1} - 5 \cdot 9^x}{9^{x+1} - 7 \cdot 4^x} < 1.$$

Публикацию подготовили
Г. В. Меледин, М. В. Фомин

4. Укажите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x < 1, \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. Высота конуса равна диаметру его основания, а объем конуса равен v . Найдите объем шара, описанного около конуса.

Вариант 4

(геологический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 8, \\ \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\rho^{\cos x} - 10 \cdot 3^{\frac{1}{2} + \cos x} + 3 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(x+1)^2 + 1 < 0.$$

4. Укажите, в какой точке функция $y = \log_{1/2}(3-2x-x^2)$ принимает наименьшее значение. Найдите это значение.

5. Отношение площади боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно $\sqrt{3}$. Найдите угол между противоположными боковыми ребрами пирамиды.

Вариант 5

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 0.$$

2. Укажите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3.$$

3. Вычислите

$$\log_{\sqrt{2}}(4\sqrt{2}) \cdot 3^{\log_{1/3}\sqrt{8}}.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{1-x} > 2x + 8.$$

5. Площадь боковой поверхности конуса равна s , а площадь его полной поверхности равна p . Определите угол между высотой и образующей конуса.

Задачи устного экзамена

1. Объясните, почему при преобразовании обыкновенной дроби в десятичную всегда получается либо конечная десятичная дробь, либо периодическая.

2. Осевым сечением конуса является правильный треугольник. В конус вложены шары S_1, S_2, S_3, \dots , каждый из которых касается всех образующих конуса. Наибольший из них S_1 вписан в конус, а каждый последующий S_i касается двух соседних S_{i-1} и S_{i+1} . Радиус шара S_1 равен r_1 . Укажите:

а) Какую последовательность образуют радиусы r_n ($n=1, 2, 3, \dots$) шаров S_n ?

б) Какую последовательность образуют объемы этих шаров?

в) Какую часть объема конуса составляет суммарный объем всех шаров вместе?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2xz + 3yz + z^2 = 11z, \\ 3xz + yz - z^2 = 2z, \\ xz - 2yz + 2z^2 = 3z. \end{cases}$$

4. Укажите, как должны быть связаны между собой числа a и b , чтобы неравенство

$\sqrt{x-a} > \sqrt{2x-b}$ имело решения. В том случае, когда решения существуют, какое множество они образуют? При каких a и b это множество есть промежуток $[1; 5]$?

5. Решите неравенство

$$\sqrt{25-x^2} \leq \frac{12}{x}.$$

6. Приведите пример фигуры, которая имеет:

а) бесконечно много осей симметрии, но не имеет центра симметрии;

б) бесконечно много центров симметрии, но не имеет оси симметрии.

7. Основания трапеции равны a и b ($a < b$). Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Площадь наименьшего из них (по площади) равна S . Укажите, какой это треугольник. Каковы площади других треугольников?

8. Радиус окружности l_1 равен r . Выясните, существует ли такая концентрическая с l_1 окружность l_2 , чтобы в кольцо, образованное этими окружностями, можно было вписать n окружностей, каждая из которых касалась бы двух соседних (n — данное натуральное число, $n \geq 3$). Определите радиус окружности l_2 .

9. Плоский угол при вершине правильной n -угольной пирамиды равен α . Определите, под каким углом наклонены к плоскости основания боковые грани пирамиды.

10. Докажите, что график каждой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) имеет ось симметрии.

11. Два шара радиусов r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) касаются между собой и всех образующих конуса. Определите угол при вершине осевого сечения конуса.

12. Решите неравенство

$$\left| \log_2 \frac{x}{8} \right| |x^2 - 5x - 6| \leq 1.$$

13. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = |x^2 - 4x| - 1$ на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

14. Решите уравнение

$$\frac{4 \sin x}{(x-3)^2} + |\sin x| = 0.$$

15. Сумма первых девятнадцати членов арифметической прогрессии равна 76. Найдите десятый член этой прогрессии. Можно ли определить еще какой-нибудь член этой прогрессии?

16. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{если } x \leq 0, \\ \log_{1/2}(x+1), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

17. Укажите все значения a , при каждом из которых наибольшее на промежутке $[0; 1]$ значение функции $y = 2 + ax^2 - x^3$ достигается в точке $x=1$.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Наблюдатель измерил, что за $t=2$ с тело в свободном падении пролетело расстояние $s=100$ м. Как долго падало тело из начального состояния покоя до момента начала наблюдения и какой путь прошло при этом?

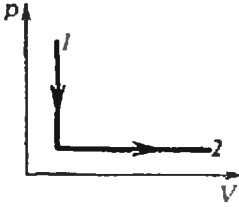


Рис. 1.

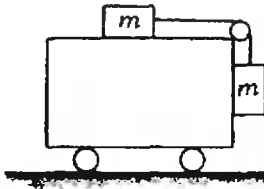


Рис. 2.

2. Сила $F=60$ Н прикладывается к санкам массой $m=40$ кг под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту один раз вверх, второй — вниз. Во сколько раз будут отличаться ускорения санок в этих случаях, если коэффициент трения $\mu=0,1$?

3. Масса $m=0,5$ кг идеального газа с молярной массой $M=0,002$ кг/моль перешла из состояния 1 в состояние 2 (рис. 1), сохранив начальную температуру $T_1=500$ К. Вычислите работу газа, если конечное давление в $k=5$ раз меньше начального.

4. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0,8$ Ом разрядился до напряжения $U=12$ В, и его поставили на подзарядку к источнику с $\mathcal{E}=20$ В. При каком добавочном сопротивлении ток зарядки не превысит допустимого тока аккумулятора, равного $I_0=2$ А? Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебречь.

5. Постройте изображение карандаша длиной $l=6$ см в линзе с оптической силой $D=+33$ дптр, если он лежит на оптической оси линзы так, что его середина совпадает с фокусом линзы.

Радиофизический факультет

1. С каким ускорением нужно двигать по горизонтали систему тел, изображенных на рисунке 2, чтобы грузики сохранили свое положение, если коэффициент их трения с опорой $\mu=0,6$?

2. В сосуде находилась жидкость плотностью ρ_1 и объемом V_1 . После добавления жидкости с плотностью, в k раз большей, конечный объем смеси оказался в N раз больше начального объема. Вычислите плотность и массу смеси.

3. Открытая с двух концов трубка длиной $l=0,76$ м до половины погружена в ртуть. Сколько ртути останется в трубке, если, плотно закрыв верхнее отверстие, вынуть трубку из ртути? Атмосферное давление считать нормальным.

4. Два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединили последовательно и зарядили от источника с напряжением U . Отключив, их соединили параллельно. Как перераспределятся заряды и каким станет напряжение на обкладках конденсаторов?

5. После ускорения разностью потенциалов U ион с зарядом q и массой m влетает в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} перпендикулярно магнитным линиям. Вычислите длину пути и время пребывания иона в магнитном поле.

Механико-математический факультет

1. До какой температуры при нормальном атмосферном давлении нужно нагреть азот, чтобы его плотность стала равной плотности метана (CH_4) при нормальных условиях?

2. Плоский конденсатор с зарядом $q=3$ мкКл подключен к аккумулятору с напряжением $U=20$ В и целиком погружен в воду ($\epsilon=81$). Что произойдет при извлечении конденсатора из воды?

3. Электрон влетел в однородное электрическое поле с напряженностью $E=10\,000$ В/м со скоростью $v_0=8$ Мм/с перпендикулярно силовым линиям. Вычислите величину и направление его скорости в момент $t=2$ нс.

4. Однородное цилиндрическое бревно едва плавает в воде в вертикальном положении. Если его притопить, то период вертикальных колебаний бревна будет $T=6$ с. Вычислите длину бревна.

5. У старой модели фотоаппарата минимальное расстояние объектива до пленки равно фокусному расстоянию ($F=40$ мм), а максимальное — в $k=5$ раз больше. Определите пределы фотографирования и максимальное увеличение.

Факультет кибернетики

1. Ракета после вертикального старта двигалась $t=30$ с с ускорением $a=3g$. Вычислите максимальную высоту ее подъема в случае пренебрежения сопротивлением воздуха.

2. В каком случае изохорическое нагревание постоянной массы идеального газа на $\Delta T=4$ К приведет к 4-кратному повышению его давления?

3. Расстояние между зарядами диполя $l=2$ мкм, а напряженность поля в точке, удаленной от зарядов на $a=1$ см, равна $E=2$ В/м. Вычислите величину зарядов диполя.

4. Протон и α -частица равных энергий влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно его магнитным линиям. Сравните характеристики их траекторий в магнитном поле.

5. При некотором положении предмета лупа дала изображение, увеличенное в $\Gamma_1=5$ раз. Как изменится увеличение при уменьшении расстояния предмета от лупы в $k=1,5$ раза?

Публикацию подготовили В. А. Вышенский, А. А. Капишев, К. В. Корсаков, Г. Л. Кулинич, Н. А. Перестюк

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность за 3 секунды быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

2. Решите уравнение $\sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0$.

3. Решите уравнение $9^x = 6 + 3^x$.

4. Решите неравенство $\frac{3}{x+3} < 1$.

5. В кубе с длиной ребра a расположен шар, касающийся трех граней, сходящихся в вершине A . Другой шар касается первого шара и трех граней, сходящихся в вершине C , где $[AC]$ — диагональ грани куба. Найдите радиусы шаров, если известно, что они относятся друг к другу как 1:2.

Вариант 2

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 351, а сумма следующих трех членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

2. Решите уравнение $\sin x + \cos x = \cos 2x$.

3. Решите уравнение $8 \cdot 9^x + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^x$.

4. Решите неравенство $\log_2 \frac{x+1}{x} > 1$.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой s . Длины всех боковых ребер пирамиды одинаковы, а длина высоты боковой грани, проведенной из вершины пирамиды к катету основания, равна длине катета. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

Физика

Задачи устного экзамена

1. В потолке имеются два люка A и B (рис. 1), расстояние между которыми $L=8$ м. Из точки C , находящейся на расстоянии $H=3$ м от потолка и расстоянии $l=4$ м от люка A , был брошен мяч так, что он пролетел через оба люка. Определите начальную скорость и угол бросания мяча. Размеры люков достаточны для пролета мяча. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

2. Цилиндр массой $M=2$ кг, имеющий осевое отверстие, скользит с трением по стержню массой $m=1$ кг, который прикреплен к вертикальной пружине с жесткостью $k=10^3$ Н/м (рис. 2). Определите энергию деформации пружины, если ускорение цилиндра $a=2$ м/с². Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

3. Система, состоящая из блока, чашечек с грузами и нити, находится в равновесии (рис. 3). Масса каждой чашечки с грузом $M=1$ кг. Затем с одной из чашечек сняли груз массой $m_1=0,1$ кг, и система пришла в движение. Определите массу груза m_2 , который надо положить на другую чашечку, чтобы натяжение нити стало равным ее натяжению в исходном равновесном состоянии.

4. Насос откачивает пары воды из емкости, на дне которой разлито $m=200$ г воды. Определите, через какое время вода полностью испа-

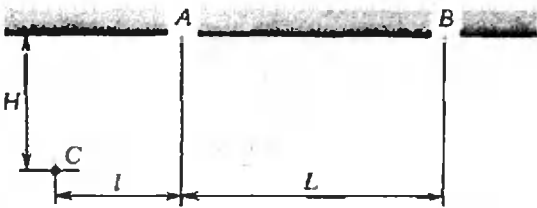


Рис. 1.



Рис. 2.

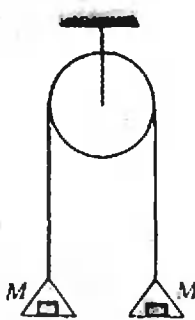


Рис. 3.

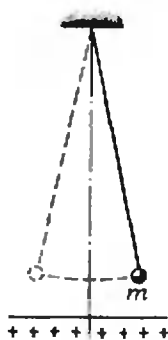


Рис. 4.

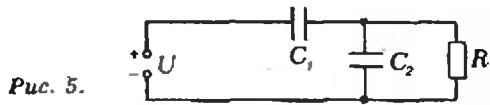


Рис. 5.

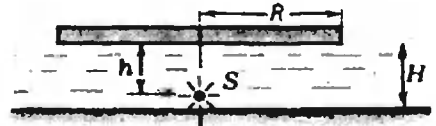


Рис. 6.

рится, если температура в емкости поддерживается постоянной и равной $t=20$ °С, а насос за каждые $\Delta t=10$ с откачивает $\Delta V=8 \cdot 10^{-4}$ м³ паров воды. Давление насыщенного пара при этой температуре равно $p_n=2333$ Па. Молярная масса воды $M=18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль · К).

5. При расширении газа тепловая машина совершает работу; при этом объем газа увеличивается от $V_1=10^{-3}$ м³ до $V_2=2 \cdot 10^{-3}$ м³, а давление линейно убывает от $p_1=10^6$ Па до $p_2=4 \cdot 10^5$ Па. Определите изменение внутренней энергии газа при его расширении и КПД тепловой машины, если известно, что количество теплоты, полученное за цикл тепловой машиной от нагревателя, $Q_1=1$ кДж, а отданное холодильнику $Q_2=0,8$ кДж.

6. Положительно заряженный шарик массой $m=30$ г совершает гармонические колебания над положительно заряженной бесконечной горизонтальной плоскостью (рис. 4); при этом сила электрического взаимодействия шарика с плоскостью $F=0,1$ Н, а период его колебаний $T=2$ с. Затем шарик перезарядили так, что его заряд стал отрицательным, но по модулю равным первоначальному. Определите период гармонических колебаний шарика в новом состоянии. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

7. В схеме, изображенной на рисунке 5, емкость конденсатора $C_2=10$ мкФ, сопротивление резистора $R=2$ кОм, площадь пластин конденсатора емкостью C_1 равна $S=100$ см², а расстояние между ними $d=5$ мм. Мощность рентгеновского излучателя, который ионизирует воздух между обкладками конденсатора емкостью C_1 , равна $\omega=2 \cdot 10^{12}$ пар носителей заряда за 1 с в 1 м³. Заряд носителей равен элементарному заряду $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Все образованные за единицу времени носители долетают до пластин первого конденсатора. Определите заряд на конденсаторе емкостью C_2 .

8. Отрицательно заряженная частица влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B=10^{-3}$ Тл, где движется по дуге окружности радиусом $R=0,2$ м. Затем частица попадает в однородное электрическое поле, где пролетает вдоль направления силовой линии участок с разностью потенциалов $U=10^3$ В; при этом скорость частицы изменяется в $n=3$ раза. Определите конечную скорость частицы.

9. В кювете (плоской ванночке) с жидкостью на глубине $h=3$ см находится точечный источник света (рис. 6), который начинает смещаться вдоль вертикали со скоростью $v=10^{-3}$ м/с. На две кюветы находится плоское зеркало, а на поверхности жидкости, на высоте $H=4$ см от дна, плавает черный диск радиусом $R=6$ см. Центр диска расположен над источником света. Через какое время источник света станет видим для внешнего наблюдателя? Показатель преломления жидкости $n=\sqrt{2}$.

10. В опытах Резерфорда α -частицы со скоростью $v = 2 \cdot 10^7$ м/с попадали на тонкую золотую фольгу. Полагая вектор скорости α -частицы совпадающим с прямой, соединяющей частицу и ядро атома золота (прямое столкновение), оцените радиус ядра. Число Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$, элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, заряд ядра золота $q = 79e$.

Публикацию подготовили
Н. А. Гладков, Л. П. Паршев

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Упростите выражения:

а) $A = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$, если $x = \frac{2ab}{b^2+1}$,
 $a > 0, 0 < b < 1$;

б) $A = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$;

в) $A = \frac{\lg^2(x^3)}{\lg^3(x^2)} \cdot \lg \sqrt{x}$.

2. Вычислите без таблиц:

а) $A = 2 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$;

б) $A = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \times \operatorname{tg} 89^\circ$;

в) $A = \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

3. Найдите:

а) $\sin^3 x + \cos^3 x$, если $\sin x + \cos x = a$;

б) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = a$.

4. Докажите тождества:

а) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$;

б) $32 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = 2 + \cos 2\alpha - 2 \cos 4\alpha - \cos 6\alpha$;

в) $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \times \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

5. Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$;

б) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+3} - 5^{x+4}$;

в) $2 \lg \lg x = \lg(3 - 2 \lg x)$;

г) $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{5}{8}$.

6. Решите неравенства:

а) $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$;

б) $0,1^{\log_3 \frac{x+1}{x-3}} < 10$; в) $\sqrt{24-10x} > 3-4x$.

7. Постройте графики:

а) $y = |x^2 - 4|$;

б) $|y - 2| = |x - 1|$;

в) $y = \sin |x|$.

8. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 625^3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_3(x+y) = x-y. \end{cases}$

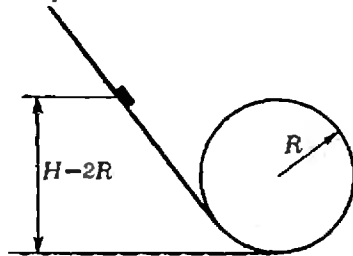
Физика

Задачи устного экзамена

1. К стене прислонена лестница массой m . Центр тяжести лестницы находится на расстоянии $1/3$ длины от ее верхнего конца. Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине лестницы, чтобы верхний конец ее не оказывал давления на стену? Угол между лестницей и стеной α .

2. Тяжелый шарик массой m подвешен на нити. Нить может выдержать натяжение $T = 2mg$. На какой угол от положения равновесия нужно отклонить нить с шариком, чтобы он оборвал нить, проходя через положение равновесия?

3. Небольшое тело соскальзывает по наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю», с высоты $H = 2R$, где R — радиус петли (см. рисунок). На какой высоте тело оторвется от поверхности петли? С какой высоты должно скатываться тело, для того чтобы отрыва не произошло?



4. Происходит соударение двух абсолютно упругих шаров массой m_1 и m_2 . Их начальные скорости v_1 и v_2 . Найдите скорости шаров после удара. Удар считать центральным; скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры.

5. Брусок массой m равномерно втягивают за привязанную к нему веревку на высоту h по доске, угол наклона которой к горизонту α . Веревка параллельна доске. Коэффициент трения бруска о доску μ . Найдите энергию, которая идет на нагревание доски и бруска.

6. Найдите работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину жесткостью $k = 30$ Н/см на $x = 10$ см.

7. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить алюминиевый шарик того же радиуса? Плотность меди и алюминия равна $\rho_1 = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м 3 и $\rho_2 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м 3 соответственно.

8. Какой наибольшей высоты можно выложить массивную кирпичную колонну постоянного по высоте поперечного сечения S , чтобы возникающая под действием только силы тяжести деформация колонны оставалась в пределах упругости? Каково при этом будет наибольшее относительное сжатие кирпичной кладки? Модуль Юнга кирпича $E = 3000$ МПа, плотность $\rho = 1,8 \cdot 10^3$ кг/м 3 , предел упругости $\sigma_{пр} = 3$ МПа.

9. Для измерения температуры воды массой $m = 66$ г в нее погрузили термометр, который показал $t_1 = 32,4$ °С. Какова была действительная температура воды, если теплоемкость термометра $C = 1,9$ Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру помещения $t_2 = 17,8$ °С?

Публикацию подготовили
Ю. М. Мещеряков, Ю. А. Морозов,
В. А. Смирнов



Первая Всесоюзная олимпиада по математике учащихся средних профессионально- технических училищ

С 20 по 25 мая 1985 года в Днепропетровске — одном из крупнейших промышленных центров нашей страны — проходила первая Всесоюзная олимпиада по математике среди учащихся средних профессионально-технических училищ.

Училищные, городские, областные, республиканские туры предметных олимпиад учащихся ПТУ стали в последние годы традиционными во многих областях и республиках страны. Так, в Ленинграде, Грузии, Вологде, Узбекистане эти олимпиады проводятся около десяти лет.

С 1985 года олимпиады по математике, физике и химии проходят во всесоюзном масштабе.

Форма проведения заключительного тура первой математической олимпиады была во многом необычной. В первый день участники решали задачи и рассказывали свои решения членам жюри. Среди задач было много имеющих прикладную направленность, требующих смекалки, допускающих нестандартные решения.

Второй день носил экспериментальный характер. Накануне учащимся I—II курсов была прочитана лекция о пользовании микрокалькуляторами, а в день олимпиады им была предложена исследовательская задача, для решения которой необходимо было обратиться к вычислительному устройству. В это устройство (использовались микрокалькуляторы «Электроника» БЗ-34 и МК-54) была заранее введена программа, позволяющая вычислить экспериментальные данные, относящиеся к некоторой физической ситуации (например, высоту, на которой находится в любой заданный момент времени центр шарика, подброшенного над столом с некоторой начальной скоростью). Учащимся предлагалось найти различные характеристики эксперимента (например, моменты падения шарика, начальную скорость, радиус шарика и т. д.)

Учащимся третьего курса была прочитана лекция на новую для них тему — «Геометрические вероятности», а в день олимпиады им были предложены задачи по теме этой лекции. Мы предполагаем осветить задания второго дня олимпиады в отдельных статьях.

Результаты олимпиады оказались замечательными. Многие участники решили все предложенные им задачи. Особенно активно проходил экспериментальный тур. Все участники работали очень увлеченно, проявили много изобретательности и выдумки.

Из 93 участников 44 награждены дипломами победителей I, II, III степени. Много было вручено различных специальных призов и грамот. Среди победителей следует назвать награжденных Дипломами I степени.

По первому курсу: *Влашин Олег* (СПТУ № 4, Иваново-Франковский), *Гвоздь Зорьяна* (СПТУ № 32, Львов), *Кучеров Николай* (СПТУ № 133, Минск), *Москаленко Сергей* (СПТУ № 8, Стрый), *Романенко Валерий* (СПТУ № 17, Киев), *Шувалов Сергей* (СПТУ № 120, Москва);

по второму курсу: *Герцберг Александр* (СПТУ № 127, Ленинград), *Малык Владимир* (СПТУ № 2, Кокчетав);

по третьему курсу: *Ковтун Сергей* (СПТУ № 4, с. Сиивка Сумской обл.), *Копчинский Константин* (СПТУ № 3, Севастополь), *Роззувайло Олег* (СПТУ № 147, Ленинград).

Олимпиада была организована очень хорошо. Радушные хозяева из Днепропетровска сделали все, чтобы она стала ярким праздником знаний. Состоялись разнообразные интересные встречи участников с членами жюри, среди которых было много известных ученых из Москвы, Ленинграда, Киева, Днепропетровска, Казани, Вологды. Возглавлял работу жюри член-корреспондент АН СССР А. А. Стогний (Киев).

Первая Всесоюзная олимпиада учащихся ПТУ показала, что в нашей профессиональной школе начали закладываться важные традиции развития творческих способностей будущих рабочих, их интереса к науке.

Задачи I Всесоюзной олимпиады по математике учащихся СПТУ

Первый день

I курс

1. Двое спускаются вниз по движущемуся эскалатору. Первый движется по эскалатору со скоростью вдвое меньшей, чем скорость эскалатора, а второй (тоже относительно эскалатора) — со скоростью вдвое меньшей, чем скорость первого. Первый при спуске насчитал 100 ступенек. Сколько ступенек насчитает второй?

2. Точка движется по оси Ox так, что зависимость ее координаты $x = x(t)$ от времени t описывается многочленом 3-й степени. Скорость точки равна нулю в моменты времени $t = 3$ и $t = 7$. В какой момент времени ускорение точки равно нулю?

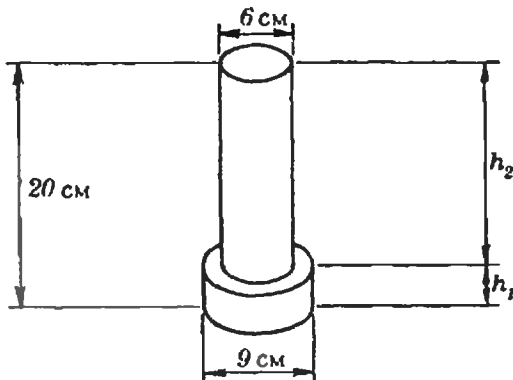
3. Стальную плитку, имеющую форму треугольника со сторонами 3, 4 и 5, положили на большой лист бумаги и обвели карандашом. Пользуясь только этой плиткой и карандашом, постройте точку пересечения биссектрис нарисованного треугольника.

II курс

1. Металлический прямоугольный ящик без крышки высотой 50 см и объемом 1 м^3 выкрасили краской изнутри и снаружи. На окраску ушло 530 г краски при расходе 50 г на один м^2 . Найдите размеры ящика.

2. Дан квадрат $ABCD$. Отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны CD , пересекает диагональ AC в точке K . Найдите угол AKB .

3. Деталь имеет форму и размеры, указанные на рисунке. Какова должна быть высота h , основания детали, чтобы центр масс детали



(сделанной из однородного материала) был как можно ниже?

III курс

1. В вагоне находится 60 контейнеров трех типов: контейнеры первого типа весят 0,5 тонны каждый, второго типа — 0,4 тонны, третьего типа — 0,3 тонны. Стоимость одного контейнера каждого типа — соответственно 800, 700 и 600 рублей. Общий вес всех контейнеров — 25 тонн. Найдите их общую стоимость.

2. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки K , L , M так, что $AK:KB = BL:LC = CM:MA = 2$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника KLM ?

3. По одну сторону от стены высотой 30 м на расстоянии 10 м от стены лежит груз, по другую сторону от стены по горизонтальной площадке ездит кран. Башня крана имеет высоту 20 м, а его стрела, прикрепленная к верхней точке башни, имеет длину l м и может быть расположена под любым углом к горизонту. При какой наименьшей длине l стрелы кран может поднять груз через стену? (Трос крана свисает вертикально с конца стрелы, его длина неограничена.)

I, II, III курс

4. Цилиндрический стержень с винтовой резьбой имеет длину 55,00 см и диаметр 1,91 см. Шаг резьбы (расстояние между соседними витками) — 1,10 см. Найдите длину образовавшейся на стержне винтовой линии.

5. Найдите, чему равен корень $\sqrt{44 \dots 4 - 88 \dots 8}$

а) при $n=1$, б) при $n=2$, в) при любом n .

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки E и F . Отрезки AF , DF , DE и EC делят параллелограмм на восемь частей — два четырехугольника и шесть треугольников. Докажите, что площадь одной из них — четырехугольника с вершиной D — равна сумме площадей трех других частей — четырехугольника с вершиной B и двух треугольников со стороной AE и стороной FC .

М. И. Башмаков, Л. М. Пашкова, А. А. Егоров

Нам пишут

В редакцию журнала поступило письмо от преподавателя МГУ В. Г. Баула. Он обращает наше внимание на фразу из статьи «Задачи на сравнение чисел» («Квант», № 2, с. 25): «такое огромное число (речь идет о числе 1986^{1985}) ... не может вычислить ни одна ЭВМ в мире».

В письме содержится программа, с помощью которой отечественная ЭВМ за три минуты вычислила все 6550 цифр числа 1985^{1986} , большего чем 1986^{1985} . Вот его первые 400

цифр:

$1985^{1986} = 6060536781938122129935577405810$
 $1706803770967881670988684242464519852023$
 $0657158223690545643526062929121017582677$
 $5818575294168144641015796954620596573211$
 $7143114344139374724738173374162794987109$
 $0083837446931844413747934279943692567389$
 $8510929687523512431089566356226432328533$
 $9041459720048602306720872973869468440323$
 $2104009956095155438800528759632404326846$
 $1137926434459089798584173784903023136766$
 $345497636...$

Ответы, указания, решения



Немного о термометре и о термоскопе Фердилянда

Во втором термоскопе важную роль играет тепловое расширение воды. Поскольку этот термоскоп полностью заполнен водой и запаян, то при нагревании вода может расширяться, лишь занимая место воздуха в колбочках (воздух не может противостоять натиску воды, так как сжимаемость у воды во много раз меньше, чем у воздуха). В результате при повышении температуры уменьшается выталкивающая сила, действующая на сосудики, и они опускаются на дно.

Ответ на второй вопрос. Неудобство использования водяного термометра при температурах, близких к 0°C , связано с аномалией теплового расширения воды.

Вспомогательный куб

1. $2 \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \sin \gamma} \right)$ (см. рис. 1). Ответ

может быть записан в виде $\arccos(\operatorname{ctg}^2 \gamma)$.

2. 60° (см. рис. 2).

3. $\arccos \frac{18 - \sqrt{2}}{20}$ (см. рис. 3).

4. $\arctg \left(\frac{\sqrt{37 \pm 6\sqrt{2}}}{2} \right)$. Рассмотрите два случая (рис. 4).

5. $\frac{1}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{6} \sin \varphi}$. Тетраэдр $SABC$ удобно расположить так, как показано на рисунке 5: отрезки AC и BD направлены вдоль ребер вспомогательного куба, вершина S принадлежит боковой грани.

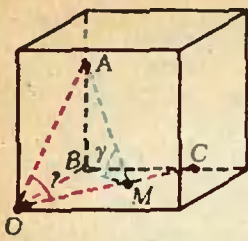


Рис. 1.

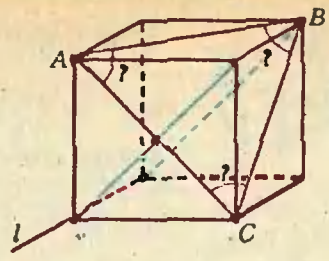


Рис. 2.

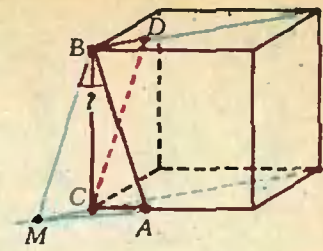


Рис. 3.

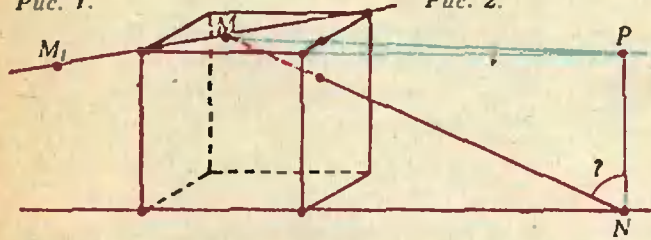


Рис. 4.

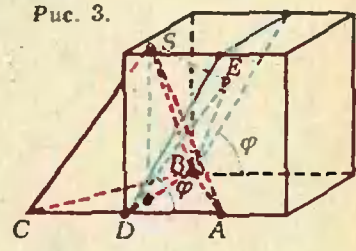


Рис. 5.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. {2; 9/2}. Указание. По теореме Виета $5x_2 = -a + 3,4x_2 = 2a$.

2. $x_1 = \frac{\pi + k\pi}{12 + 6}; x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4} (k, n \in \mathbb{Z})$.

3. 3. Указание. Пусть MN — средняя линия трапеции ABCD, N — середина AB. Докажите, что треугольники AMN и BMN равнобедренные ($|AN| = |NM| = |BN|$), а $\angle AMB = 90^\circ$.

4. $]-\infty; -2 \log_5 2] \cup [-\log_5 3; 0] \cup]\log_5 3; +\infty[$.

5. $\sqrt{\frac{2}{11 - 4\sqrt{2}}}$. Указание. Пусть M и N — точки пересечения плоскости β с ребрами BD и BC, K — середина CD, L — точка пересечения MN и BK. Площадь треугольника BMN составляет половину площади грани BCD. Определите величину $|BL|$. Докажите, что искомое расстояние равно высоте треугольника ABL, опущенной из вершины B.

Вариант 2

1. Первое число больше.

2. $(1; 2), (-1; 6), (\sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$.

3. 3 : 1. Указание. Проведите через N прямую, параллельную основаниям; пусть она пересечет AM в точке L. Используя подобие треугольников BMK и KLN, докажите, что $|ML| = 3|KM| = \frac{3}{4}|AM|$.

4. $x_1 = -\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}; x_2 = \frac{\pi}{40} + \frac{n\pi}{5} (k, n \in \mathbb{Z})$.

5. $\text{arctg} \frac{2\sqrt{13}}{3}$. Указание. Пусть плоскость α пересекает прямые CC' и BC в точках K и P соответственно. Определите $|CK|$ и $|CP|$. Докажите, что угол KLC прямогольного треугольника KLC, где CL — высота, опущенная из вершины C в треугольнике DPC, является искомым.

Физика

Вариант 1

1. $F_{\min} = \frac{F}{1 - S_2/S_1}$.

2. $Q = \frac{C_2(C_1 + C_3)U^2}{C_1 + C_2 + C_3} \cdot 2$. Указание. При уста-

новившемся напряжении конденсаторы имеют общий заряд $q = C_2U$ и соединены параллельно.

3. См. решение задачи Ф978 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

4. Наблюдатель, стоящий на земле, увидит Солнце через время t , которое затратит Земля для поворота на угол α (рис. 6):

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\widehat{BOA}}{2\pi/T} \approx \frac{\sqrt{2}h/R}{2\pi/T} \approx 15 \text{ мин}$$

(здесь $h = 10 \text{ км}$, $R = 6,4 \cdot 10^3 \text{ км}$, $T = 1 \text{ сутки}$). Заменяв R на $R \cos \varphi$, можно учесть широту φ . 5. Когда брусок кладут на два ролика, сила трения, действующая на него со стороны заклиненного ролика B (рис. 7), стремится повернуть брусок по часовой стрелке. В результате сила давления на правый (нижний) ролик будет больше, чем на левый (верхний). Поэтому в первом случае сила трения будет меньше, чем во втором. Если брусок начал соскальзывать, то благодаря тому, что центр тяжести смещается вправо, сила реакции N, а значит, и сила трения $F_{\text{тр}}$, действующая на левый ролик, будет уменьшаться, а на правый — увеличиваться. Вот почему брусок в первом случае не сможет остановиться, а во втором — остановится.

Вариант 2

1. $R_V = R^2/r$.

2. При $l < F$ решения нет, при $F < l < R + F$ расстояние $d = lF/(l - F)$, при $l > R + F$ имеются два решения (рис. 8): $d_1 = lF/(l - F)$ и $d_2 = (l - R)F/(l - R - F)$.

3. $\omega = \sqrt{2k(1 - \sqrt{2/3})} \sqrt{M - m}$.

4. См. решение задачи Ф982 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

5. При взбалтывании из-за существенного увеличения поверхности соприкосновения горячей воды с воздухом в колбе происходит быстрый разогрев воздуха, что приводит к увеличению его давления. Кроме того, резко усиливается испарение воды и к давлению воздуха добавляется заметное давление водяных паров. В результате этого шарик раздувается. Потом воздух остывает, пар конденсируется, давление уменьшается, шарик сокращается в размере. Далее все повторяется, но при меньшей температуре, поэтому явление выражено слабее.

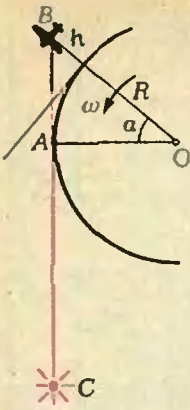


Рис. 6.

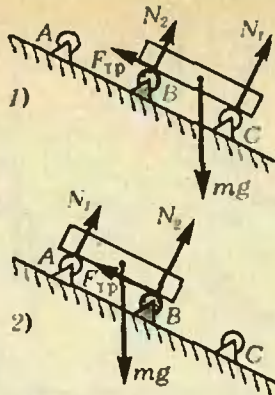


Рис. 7.

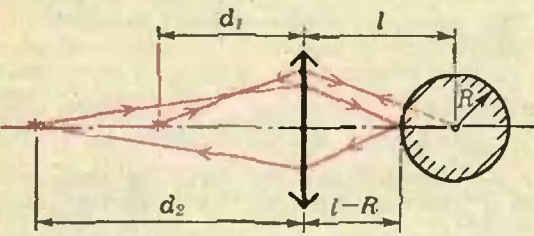


Рис. 8.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

- $\frac{3}{2} \left(1 - \ln \frac{3}{2}\right)$. 2. $x = \pm \frac{3\pi}{2} + 4k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $\frac{a^4 r}{2\sqrt{3}(a^2 - 12r^2)}$.
- 2 при $a=0$, $|a| > 2$;
3 при $|a|=2$, $|a| = \sqrt{3}$;
4 при $0 < |a| < \sqrt{3}$, $\sqrt{3} < |a| < 2$.
- $-\frac{1}{2} \leq a < 0$.

Вариант 2

- $y_{\min} = \frac{1}{4}$, $y_{\max} = \frac{1}{2}$.
- $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 17, 10, 3 и 8, 10, 12.
- $\left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[2; 4\right]$.
- $2 \arctg 3$.

Вариант 3

- $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 18$.
- $]-\infty; \log_{9/4} \frac{7}{9} \cup \log_{9/4} \frac{15}{14}; \infty[$.
- $a = -1$, $a = 3$.
- $\frac{125}{32} v$.

Вариант 4

- $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

2. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $]-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; -1[\cup]-1; -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

4. $y_{\min} = y(-1) = -2$.

5. 90° .

Вариант 5

1. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. На промежутках $]-\infty; -1[$ и $]2; \infty[$ функция возрастает, а на промежутке $]-1; 2[$ — убывает.

3. $\frac{26}{15}$. 4. $x \in]-\infty; -3[$.

5. $\arcsin \frac{p-s}{8}$.

Задачи устного экзамена

2. а) геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{3}$; б) геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{27}$ и первым членом $\frac{4}{3} \pi r^3$; в) $\frac{6}{13}$.

3. $\{(x; y; 0), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; \{1; 2; 3\}\}$.

4. Если $b \leq 2a$, то неравенство не имеет решений. При $b > 2a$ решения неравенства образуют интервал $\left[\frac{b}{2}; b-a\right]$. В частности, это будет интервал $[1; 5]$, если $a = -3$, $b = 2$.

5. $]0; 3] \cup [4; 5]$.

6. а) полуплоскость; б) множество отрезков прямых $y = x + n$, $n \in \mathbb{Z}$, с концами на прямых $y = 0$ и $y = 1$.

7. Наименьшую площадь имеет треугольник, прилегающий к меньшему основанию трапеции. Треугольник, прилегающий к большему основанию трапеции, имеет площадь $\frac{b^2}{a^2} S$. Треугольники, прилегающие к боковым сторонам трапеции, равновелики. Площадь каждого из них равна $\frac{b}{a} S$.

8. $r \frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}}$; $r \frac{1 - \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$.

9. $\arccos \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$.

11. $2 \arcsin \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$.

12. $\left]0; \frac{3}{2}\right] \cup]3; 6]$.

13. $y_{\max} = y(2) = 3$, $y_{\min} = y(0) = -1$.

14. $x = 5$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

15. 4. Нет.

17. $a \geq \frac{3}{2}$.

Физика

Физический факультет

1. $t_0 = \frac{s}{g\tau} - \frac{\tau}{2} = 4 \text{ с}$; $s_0 = \frac{g\tau_0^2}{2} = 80 \text{ м}$.

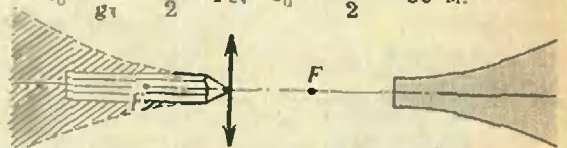


Рис. 9.

2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{F \cos \alpha - \mu (mg - F \sin \alpha)}{F \cos \alpha - \mu (mg + F \sin \alpha)} \approx 1,65.$

3. $A = \frac{m}{M} RT \left(\frac{k-1}{k} \right) = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$

4. $R = (\mathcal{E} - U - I_0 r) / I_0 = 3,2 \text{ Ом.}$

5. Изображение карандаша состоит из двух частей: действительная часть расположена за линзой, мнимая — перед линзой (рис. 9).

Радиофизический факультет

1. $a = g(1 - \mu) / (1 + \mu) = 2,5 \text{ м/с}^2.$

2. $n = \rho_1 V_1 (1 + k(N-1)); \mu = \rho_1 (1 + k(N-1)) / N.$

3. $x = (h_0 + l - \sqrt{h_0^2 + l^2}) / 2 \approx 0,22 \text{ м}$ (здесь $h_0 = 760 \text{ мм}$ — высота столбика ртути в барометре, соответствующая нормальному атмосферному давлению).

4. $q_1' = 2C_1^2 C_2 U / (C_1 + C_2)^2; q_2' = 2C_1 C_2^2 U / (C_1 + C_2)^2; U_1' = U_2' = 2C_1 C_2 U / (C_1 + C_2)^2.$

5. $l = \frac{\pi}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}; t = \frac{\pi m}{qB}.$

Механико-математический факультет

1. $T = T_0 M_a / M_m \approx 478 \text{ К.}$

2. Энергия конденсатора уменьшится на $\Delta W = qU(1 - 1/\epsilon) / 2 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$

3. $v = \sqrt{v_0^2 + (eEt/m)} \approx 8,7 \text{ Мм/с;}$

$\alpha = \text{arctg}(eEt/(mv_0)) \approx 24^\circ$ (α — угол между векторами \vec{v} и \vec{v}_0).

4. $l = T^2 g / (4\pi^2) \approx 9 \text{ м.}$

5. $d_{\text{min}} = kF / (k-1) = 0,05 \text{ м; } d_{\text{max}} \rightarrow \infty; \Gamma_{\text{max}} = k-1 = 4.$

Факультет кибернетики

1. $h_{\text{max}} = at^2/2 + (at)^2/(2g) = 6gt^2 = 54 \text{ км.}$

2. Начальная температура газа $T = \Delta T / 3 \approx 1,3 \text{ К.}$

3. $q = 4\pi \epsilon_0 E a^3 / l \approx 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$ (здесь $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — электрическая постоянная).

4. Радиусы круговых траекторий протона и α -частицы одинаковы.

5. $\Gamma_2 = \frac{k|l_1}{(k-1)\Gamma_1 + 1} \approx 2,14.$

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 15 с, 18 с. 2. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$ 3. {1}.

4.] $-\infty$; $-3[0$; $+\infty[.$ 5. $a/5, 2a/5.$

Указание. Пусть r и $R = 2r$ — радиусы данных шаров, а O_1 и O_2 — их центры. Точки O_1 и O_2 лежат в плоскости $AA'C'C$. Имеем (обозначения ясны из рисунка 10). $|AC| = a\sqrt{2} = |AF| + |FG| + |GC|$, но $|AF| = |O_1F|\sqrt{2} = r\sqrt{2}$, $|GC| = R\sqrt{2} = 2r\sqrt{2}$, $|FG| = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} = 2r\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. $a = 243; q = 1/3.$ 2. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x_2 = -\pi/2 + 2l\pi; x_3 = 2m\pi (k, l, m \in \mathbb{Z}).$ 3. {1}.

4.]0; 1[. 5. $\frac{\pi c^3}{6(\sqrt{6}+1)^3}.$

Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида ($\widehat{ACB} = 90^\circ$). Высота SD проходит через середину AB (см. рис. 11). Кроме того, если SE — высота грани ASC , то, по условию, $|SE| = |BC| = 2|ED|$, поэтому $\cos \widehat{SED} = 1/2$, то есть $\widehat{SED} = 60^\circ$. Для вычисления радиуса вписанного

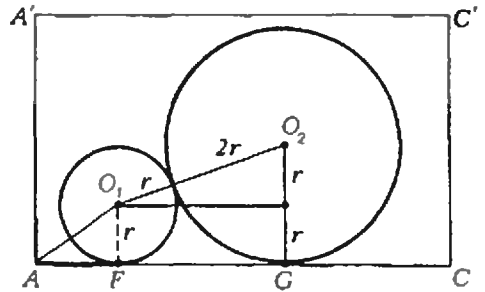


Рис. 10.

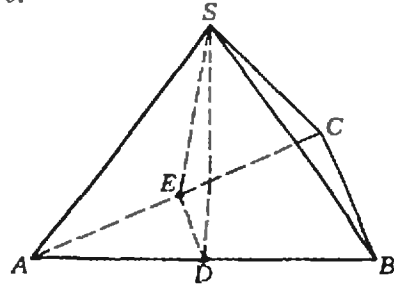


Рис. 11.

шара воспользуйтесь формулой $r = \frac{3V}{S}$, где V — объем, а S — полная поверхность пирамиды.

Физика

1. $\alpha = \text{arctg}\left(H\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l+L}\right)\right) = \frac{\pi}{4};$

$v_0 = \sqrt{\frac{gl}{2(\text{tg } \alpha - H/l) \cos^2 \alpha}} \approx 12,6 \text{ м/с.}$

2. $E = (M(g - a) + mg^2) / (2k) = 0,34 \text{ Дж.}$

3. $m_2 = \frac{m_1}{1 - 2m_1/M} = 0,125 \text{ кг.}$

4. $\tau = \frac{\Delta t m RT}{M p_n \Delta V} \approx 14,5 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 4 \text{ ч.}$

5. $\Delta U = Q_1 - (p_1 + p_2)(V_2 - V_1) / 2 = 300 \text{ Дж; } \eta = (1 - Q_2/Q_1) 100\% = 20\%.$

6. $T' = T \sqrt{\frac{mg - F}{mg + F}} \approx 1,4 \text{ с.}$

7. $q = 2ewdSRC_2 = 6,4 \cdot 10^{-11} \text{ Кл.}$

8. $v = \frac{2nU}{(n^2 - 1)RB} = 3,75 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

9. $t = \frac{1}{v} \left(\frac{R}{\text{tg } \arcsin(1/n)} + h - 2H \right) = 10 \text{ с.}$

10. $r = \frac{qeN_A}{\lambda_0 M v^2} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ м,}$ где $M = 4 \times 10^{-1} \text{ кг/моль}$ — молярная масса гелия.

Московский архитектурный институт

Математика

1. а) $1/b$; б) $-1/2$. Указание. Умножьте A на $\sin \pi/7$, после чего воспользуйтесь формулой $\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$; в) $9/16$.

2. а) $1/4$. Указание. Умножьте A на $\sin 20^\circ$; б) 1 ; в) $\sqrt{3}$.

3. а) $\frac{a}{2}(3 - a^2)$; б) $\pm \sqrt{a^2 - 4}$. 5. а) $\{-1; 3\}$;

б) $\{-1\}$; в) $\{10\}$; г) $x = \frac{\pi}{6} (3k \pm 1) (k \in \mathbb{Z})$.

6. а)]0; 2 $-\log_3[0$; $+\infty[$; б)] $-\infty$; $-5[0$; $+\infty[$; в)] $-5/8; 12/5[.$ 7. а) см. рисунок 12;

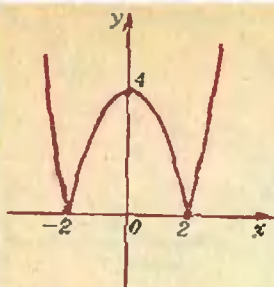


Рис. 12.

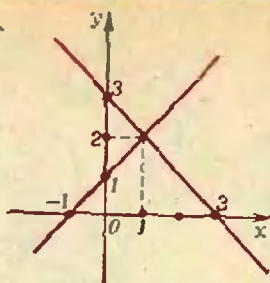


Рис. 13.

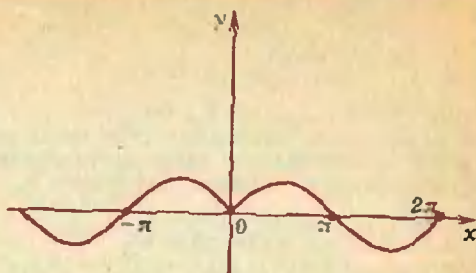


Рис. 14.

- б) см. рисунок 13; в) см. рисунок 14.
 8. а) $\{(625; 3); (125; 4)\}$; б) $\{(4; 1)\}$.

Физика

- $F = 4/3 mg \operatorname{ctg} \alpha$.
- $\alpha > 60^\circ$.
- $H_1 = 5/3R$; $H_2 = 5/2R$.
- $v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$;
 $v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$.
- $E_x = mgh \mu \operatorname{ctg} \alpha$.
- $A = kx^2/2 = 15$ Дж.
- Период колебаний уменьшится в $\sqrt{\rho_1/\rho_2} \approx 1,8$ раза.
- $H_{\text{мах}} = c_{\text{впр}}/(\rho g) \approx 167$ м; $\epsilon_{\text{с.вх}} = \sigma_{\text{впр}}/E = 0,001$.

- $t_2 = t_1 + \frac{C(t_1 - t_2)}{c_{\text{вп}}} = 32,5^\circ \text{C}$ (здесь $c_{\text{вп}} = 4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды).

Избранные школьные задачи
 (см. «Квант» № 4)

- 1. Указание. Выделим полного квадрата преобразуйте данное выражение к виду

$$\frac{1}{2}(2x - y + 1)^2 + \frac{1}{2}(3y + 1)^2 - 1.$$

Наименьшее значение равно -1 и достигается при $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

167166500. Решение. Перепишем данную сумму, воспользовавшись равенством $k(k+2) = \frac{(k+2)^2 - k^2 - 8}{6}$:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + 999 \cdot 1001 &= \frac{2^3 - 1^3 - 8}{6} + \\ &+ \frac{5^3 - 3^3 - 8}{6} + \frac{7^3 - 5^3 - 8}{6} + \dots \\ \dots + \frac{1001^3 - 999^3 - 8}{6} &\approx \frac{1001^3 - 1^3 - 500 \cdot 8}{6} = \\ &= \frac{1002999000}{6} = 167166500. \end{aligned}$$

76. Указание. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, поэтому все делители числа 1001 — это $1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001$.

- а) $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$; б) $\sqrt{P_1^2 + P_2^2}$. Решение. Положим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Треугольники ACD и BCD

подобны треугольнику ABC , причем коэффициенты подобия равны, соответственно, b/c и a/c .

а) Если r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , то $r_1 = br/c$ и $r_2 = ar/c$. Поэтому $r_1^2 + r_2^2 = (br/c)^2 + (ar/c)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} \cdot r^2 = r^2$.

б) Если P — периметр треугольника ABC , то $P_1 = bP/c$ и $P_2 = aP/c$; поэтому $P_1^2 + P_2^2 = (bP/c)^2 + (aP/c)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} P^2 = P^2$.

- $2a^2$. Указание. Положив $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$, где M — точка описанной окружности, найдите сумму $x^2 + y^2 + z^2$, применив три раза теорему косинусов.

б. $x_1 = x_2 = \dots = x_{10} = 1$. Решение. Сумма всех уравнений равна $55x_1 + 55x_2 + \dots + 55x_{10} = 550$, откуда $x_1 + \dots + x_{10} = 10$. Разность второго и первого уравнений равна $9x_1 - x_2 - \dots - x_{10} = 0$. Складывая эти два уравнения, получаем $10x_1 = 10$, то есть $x_1 = 1$. Аналогично находим x_2, \dots, x_{10} .

7. Решение. Поделим обе части неравенства на xyz и перенесем все слагаемые в левую часть. Неравенство примет вид

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{yz} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{xy} \geq 0,$$

то есть

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)^2 \right] \geq 0.$$

- Указание. Воспользуйтесь теоремой косинусов и свойством биссектрисы угла треугольника.

9. Указание. Если расsects треугольную пирамиду произвольной плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам, то в сечении получится параллелограмм (см. рисунок 15). Если двигать эту плоскость от одного ребра к другому, то одна пара сторон будет увеличиваться от 0 до b , а другая пара сторон будет уменьшаться от a до 0 (a и b — длины выбранных ребер). Значит, в некотором проме-

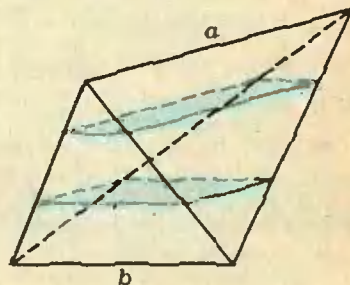
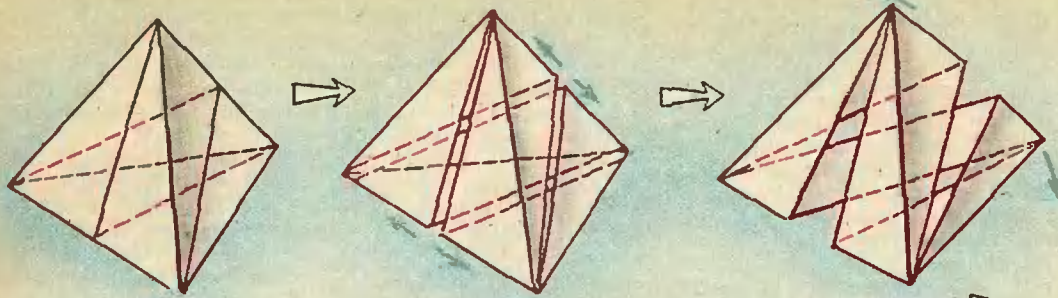


Рис. 15.



жуточном положении длины всех сторон параллелограмма сделаются одинаковыми, то есть параллелограмм сделается ромбом.

10. $x = \frac{2\sqrt{2}+1}{2}$. Указание. Перепишите данное уравнение в виде $t^2 - 1 = [t]$, где $t = \frac{2x-1}{2}$, и заметьте, что при $t < 1$ и $t > 2$ равенство невозможно. Таким образом, $1 < t < 2$.

В этом случае $[t] = 1$, и уравнение принимает вид $t^2 = 2$.

11. $\{(0; 0), (3; 3), (-3; -3), (\sqrt{5}; -\sqrt{5}), (-\sqrt{5}; \sqrt{5}), (\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}), (\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}), (-\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}), (-\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2})\}$. Указание.

Складывая и вычитая уравнения системы, получите систему

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 9) = 0, \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 5) = 0, \end{cases}$$

равносильную совокупности четырех систем, каждая из которых уже легко решается.

12. $|BD| = \frac{|BC| + |AB| - |AC|}{2}$. Указание.

Воспользуйтесь тем, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, заключенные между этой точкой и точками касания, равны.

Можно доказать, что D — это точка касания со стороной BC окружности, вписанной в треугольник ABC .

13. $\{\frac{5}{4}; \frac{5}{3}\}$. Указание. Возведите обе части уравнения в квадрат и сделайте замену переменных $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

14. $(mn(m+1)(n+1))/4$. Указание. Пару горизонтальных линий можно выбрать

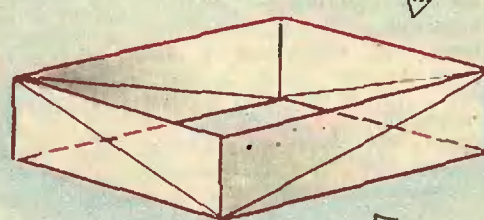


Рис. 17.

$(m(m+1))/2$ способами; аналогично, пару вертикальных линий можно выбрать $(n(n+1))/2$ способами.

15. Плоскость $A'C'D$ (см. рисунок 16) должна быть горизонтальной. Указание. Площадь ортогональной проекции параллелепипеда $ABCA'B'C'D'$ на горизонтальную плоскость равна удвоенной площади проекции треугольника $A'C'D$.

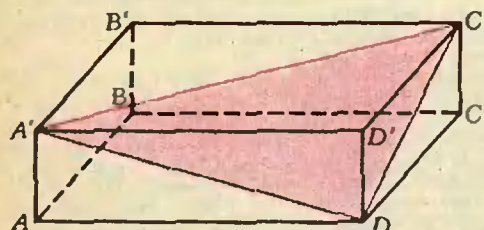


Рис. 16

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 4)

1. После первого перехода туристу осталось пройти $2/3$ пути; после второго перехода ему осталось пройти $2/3$ остатка, то есть $2/3 \cdot 2/3$ пути. После третьего перехода ему осталось пройти $2/3$ нового остатка, то есть $2/3 \cdot 2/3 \cdot 2/3 = 8/27$ всего пути. Таким образом, 32 км составляют $8/27$ всего пути. Отсюда весь путь равен 108 км.

2. В год печатается $12 \cdot 5 = 60$ задач. К началу 1970 года было напечатано 0 задач, поэтому к началу года с номером K будет напечатано $60 \cdot (K - 1970)$ задач. Если K — искомый год, то $60 \cdot (K - 1970) < K$, а $60 \cdot (K + 1 - 1970) > K$. Отсюда

$$60 \cdot 1969 < 59K < 60 \cdot 1970,$$

то есть

$$2002 \frac{22}{59} < K < 2003 \frac{23}{59}$$

Единственное целое число, удовлетворяющее этому неравенству, — это число 2003. Таким образом, это событие (номер математической задачи в «Задачнике «Кванта» равен году вы-

хода журнала) произойдет в 2003 году. К началу этого года будет напечатано 60 (2003 — 1970) = 1980 задач. Останутся 23 задачи. За первые четыре месяца 2003 года будет опубликовано 20 задач, а третьей задачей майского номера «Кванта» будет задача М2003.

3. Плохая теплопроводность тряпки объясняется низкой теплопроводностью воздуха, содержащегося в ней. Теплопроводность воды гораздо выше, поэтому, если заменить в тряпке воздух на воду (то есть намочить тряпку), можно сильно обжечь руку.

4. См. рисунок 17.

5. $182 \times 302 = 54\,964$; $204\,579 : 3 = 68\,193$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Задание 3 (И. Харузек). 1. Cf5!! (сразу 1. Kpc5 не опасно из-за 1...f5) 1...gf (1...f6 2. C:g6+ Kp48 2. Cf7) 3. Kpc5 f6 3. Kpd6 Lg8 4. Kpe6 Kpf8 5. Kp:f6 и т. д.

Задание 4 (Л. Куббель). 1. Sc5 Lc8. Если 1...Kpc8, то 2. Ca7, и черные беззащитны: белый король приближается к пешке, а на 1...Lb8 решает 2. Lh8+ Kpc7 3. Cd6+. 2. Cb6+ Kpe8 3. Sc7 a5 4. Kpd1 a4 5. Kpc1 a3 6. Kpb1 a2+7. Kpa1! (7. Kp:a2? La8+), и черные должны сдаться.

Победители шахматного конкурса 1986 года
Победителями конкурса признаны: А. Балыков (Тбилиси), А. Баранов (Чайковский), Г. Бедный (Бердичев), А. Бойко (Кировоград), В. Браила (Комрат), М. Германов (с. Чаши Курганской обл.), А. Кириченко (ст. Староцербиновская Краснодарского края), О. и Н. Клигер (Кировоград), Д. Красиков (Ростов-на-Дону), Я. Криволапов (Киев), А. Кудрик (Кривой Рог), А. Кузнецов (Ленинград), И. Купалов (Москва), Г. Леонов (Курган), А. Липовенко (Кривой Рог), Е. Лобанов (д. Уроп Кемеровской обл.), Ю. Махлин (Москва), В. Медведев (Москва), М. Палецкий (Середина-Вуда), Д. Рабинович (Рига), С. Рассказов (Карпинск), А. Серебренников (Москва), С. Тасмуратов (Астрахань), В. Татолян (Ереван), И. Трубников (Тольятти). Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломом и значком журнала «Квант», шахматно-математической литературой с автографами А. Е. Карпова и Е. Я. Гика и получают право на присвоение I разряда по шахматам.

Кроме того, еще 25 участников конкурса награждаются значком журнала «Квант» и получают право на присвоение II разряда по шахматам.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. В. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, В. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский,
А. А. Егоров, И. И. Клумова, Т. С. Петрова,
А. В. Сотинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили

Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. Г. Захаров, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
Е. К. Текчуркина, П. И. Чернуцкий, В. В. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006 Москва К-6,

ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.03.86. Подписано к печати 21.04.86.

Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 6,6. Уч.-изд. л. 7,31. Т - 11718.

Тираж 202 198 экз.

Цена 40 коп. Заказ 705

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142 300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка



Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гук.

БЕСКОНЕЧНАЯ ДОСКА

Сегодня мы рассмотрим несколько шахматно-математических задач и головоломок на неограниченной доске.

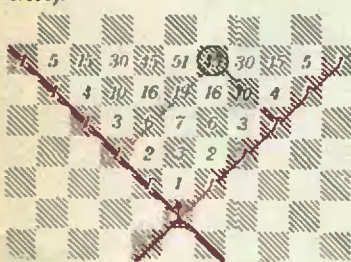
На бесконечной доске находятся два белых ферзя и черный король. Могут ли белые поставить мат? Если могут, то за сколько ходов? Зависит ли это от начальной расстановки фигур?

Мат ставится не позднее четвертого хода при любом исходном расположении фигур. Сначала один из ферзей объявляет шах по вертикали, и в ответ на отступление короля на одну из соседних линий второй ферзь зажимает короля на двух вертикалях. Если обычную доску рассматривать как фрагмент неограниченной, то можно считать, что возникает примерно такая позиция: ферзи на полях c1 и f8, король на d4. Теперь на любой ход короля следует горизонтальный шах с матом на следующем ходу, например: 2... Kрe4 3. Фс4+ и 4. Фff4X.

Отправим теперь на бесконечную доску короля.

Сколькими различными способами может пройти король путь между двумя произвольными полями бесконечной доски за наименьшее число ходов?

Выберем одно из полей как исходное, проведем через него две диагонали, разбивающие доску на четыре прямых угла, и повернем доску так, чтобы конечное поле для короля оказалось сверху (на следующем рисунке одно такое поле отмечено кружочком).

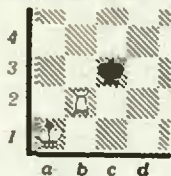


Теперь в соседние поля с королем записываются три единицы, а затем на каждое поле следующей горизонтали ставится сумма чисел тех полей предыдущей горизонтали, с которых король может попасть на данное поле. Числа, написанные на полях доски, и есть количество кратчайших маршрутов короля с исходного поля до заданного.

Получившаяся таблица называется 3-арифметическим треугольником, ее свойства подробно изучаются в комбинаторике. Конечно, можно было бы строить числовую таблицу сразу на всей плоскости, но ясно, что в трех других углах картина полностью повторится. С другой стороны, если нас интересует не общий принцип, а конкретный ответ для двух данных полей, можно ограничиться рассмотрением прямоугольника, отмеченного на рисунке пунктиром, потому что, покинув этот прямоугольник, король уже не в состоянии будет пройти путь между выбранными полями за кратчайшее число ходов.

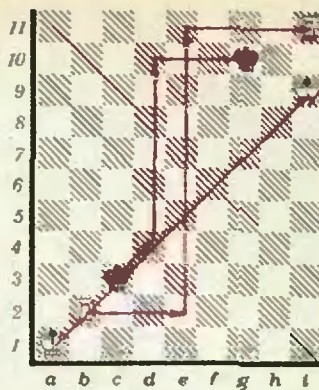
Следующую необычную задачу на бесконечной доске придумал американский математик С. Нортон.

Могут ли белые выиграть в следующей позиции (доска неограничена с двух сторон)?



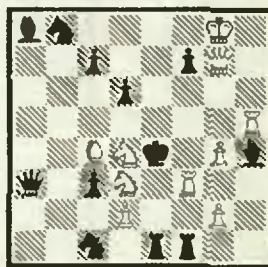
На первый взгляд задание кажется невыполнимым, поскольку черный король убегает на север или на восток. Если ладья мешает его движению, то король подходит к ней, сгоняет с места, и одно из направлений становится открытым, а король белых, похоже, не поспевает на помощь. И все же белые могут заматовать черного короля, причем даже не выходя за пределы прямоугольника 9x11! Вот как решается эта задача.

1. Le2! Kpd4. После 1... Kpd3 2. Le11 черные только теряют темп по сравнению с основным вариантом. 2. Kрb2 Kpd5 3. Крc3 Kpd6 4. Kpd4 Kpd7 5. Le11! Kpd8 6. Крe5 Kpd9 7. Kрf6 Kpd10. Как будто усилия белых не увенчались успехом — ладья должна уйти, освобождая

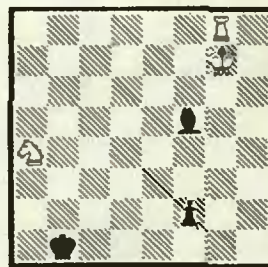


путь черному королю. Однако белые добились важной цели — перебросили короля правее ладьи, и теперь обе фигуры участвуют в окружении. 8. Li11! Kрe10. Королю остается бежать лишь на восток, но далеко ему не уйти. 9. Kрg7 Kрf10 10. Kрh8 Kрg10 11. Kрi9! Все, черный король отрезан по обоим направлениям. Дальнейшая игра состоит в простом матовании одинокого короля на доске конечных размеров. Из решения задачи следует, что на доске, ограниченной с двух сторон, король и ладья справляются с одиноким королем соперника, независимо от начального расположения всех трех фигур.

Конкурсные задания



9. Белые начинают и дают мат в 2 хода.



10. Белые начинают и делают ничью.

Срок отправки решений — 20 июля 1986 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9. 10».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Подвигу — четверть века

12 апреля 1986 года исполнилось 25 лет со дня полета Юрия Гагарина в космос. Все эти годы не ослабевает поток марок и почтовых блоков разных стран, посвященных этому выдающемуся событию. Некоторые из них, не воспроизводимые в нашем журнале, мы помещаем в этом номере.

В. Рудов



REPÚBLICA DEMOCRÁTICA DE SÃO TOMÉ E PRÍNCIPE



60º ANIV. DA REVOLUÇÃO DE OUTUBRO 1917